Årg. 30: 1 Mars 1947

ELEMENTA

Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi

REDAKTION OCH EXP.: Karlbergsv. 16IV STOCKHOLM

FÖRSTA HÄFTET

Sid.

Karl Myrbäck, Nobelprisen i kemi 1946 1

J. O. Linde, Nobelpriset i fysik 1946 9

Nils Juringius, Bevis för en tetraedersats 16

G. Elfving, Det matematiska sannolikhetsbegreppet 19

Torsten Jönsson, Ett par nya jonisationsvakuumetrar 34

Helge Eriksson, Bestämning av luftens syrehalt vid kemiundervisningen i realskolan 41

Red.: »Till läsekretsen» 43

Notis om nydöpta grundämnen 18

Bror Gustaver, Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning. Årsmötet i Stockholm i jan. 1947. Referat av föredrag om »Problemen till handelsräkning i realexamen» och »Fysik- och kemiundervisningen i de finska läroverken» samt av diskussion om »Lärarutbildningen i matematik, fysik och kemi». Styrelseberättelse för 1946 44

Bokanmälningar: Cramér, Mathematical Methods of Statistics; Bohr, Quantum d'action et noyaux atomiques; Ribaud, Constantes thermodynamiques des gaz aux températures élevées; Hyslop, Infinite Series; Wood, The Cavendish Laboratory; Porter, The Method of Dimensions; Hoag, Electron and Nuclear Physics; Clark, Photography by Infrared; Wilson-Nier-Reiman, Preparation and Measurement of Isotopic Tracers; L. de Broglie, Le Méson, Aspects théoriques et expérimentaux; Kosmos bd 24; Berg, Engelska och amerikanska mätinstrument; Kurs i kärnfysik; Belcher-Godbert, Semi-Micro Quantitative Organic Analysis; Wertenstein, Radioactivité; MIT Radar School, Principles of Radar; Heldman, Techniques of Glass Manipulation in Scientific Research 54

Föredrag under hösten 1946 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar 67

Problemavdelning:

Matematiska uppgifter (red. av S. Bågman) 68

Matematiska och fysikaliska uppgifter vid fyllnadsprövningarna efter studentexamen i januari 1947 73

Tidskrifter, innehållsöversikt 79

Pris pr år kr. 8: — pr häfte kr. 2: 50

ELEMENTA

Redaktionskommitté: professor G. Borelius, adjunkt S. Bågman, förste aktuarien S. Comét, lektor G. Starck, professor J. Tandberg och lektor A. Wahlgren. Redaktör och ansvarig utg.: C. E. Blom.

Årligen fyra häften om i regel 64 sid. (mars, juni, sept., dec.). Pris pr år kr. 8:-, pr häfte kr. 2:50. Subskription sker enklast genom inbetalning av kr. 8:- å postgirokonto nr. 527 55, då tidskr. erhålles pr utgivarekorsband. Abonnemang även genom bokhandeln.

Äldre årgångar erhållas direkt från expeditionen till följande priser: Årg. 3, *6—11, 13—16* à 6 kr. pr årg., årg. *17—29* à 8 kr. Bundna i klotband, två årg. i varje bd årg. *7—8, 9—10, 13—14, 15—16* à 14 kr. pr band, årg. *17—18, 19—20, 21—22* à 18 kr. pr band. Lagret av bundna årg. är mycket litet.

Innehållsregister till årg. *1—16* à 1 kr. och till årg. *17—24* à 1 kr.

Lagret av pärmar är slut. På grund av materialbrist kan nytillverkning ej ske för närvarande.

Särtryck ur Elementa:

1. Axel Nordhult, De viktigaste konstruktions- och driftsegenskaperna hos likströmsmaskinerna, kr. 1: —.
2. Martin Sjöström, Vätskors och gasers strömning, kr. 1: —.
3. M. Sundqvist, Teorien för de moderna glasögonen, kr. 1: —.
4. J. Tandberg, Vinkelns tredelning. Slutsåld.
5. Gustaf Ljunggren, Gasskyddets kemi, kr. 0: 80.
6. Stig Comét, Matrisräkning, kr. 1: 60.
7. H. Henrikson, Om segelflygning och dess energikällor i atmosfären, kr. 2: 40.
8. K.-B. Augustinsson, Vitaminernas kemi, kr. 1: 40.
9. L. G. Sillén, Kemiska reaktionsformler, kr. 1: 40.

Problemhäften: 1936 à 60 öre; *1943, 1944, 1945 och 1946* à 80 öre; med svar och anvisningar. Innehålla matem. o. fysikaliska uppg. i studentex. o. fyllnadsprövningar. Provräkn. i realex. Uppg. i fysik o. i maskin- o. byggnadslära vid praktisk realex.

Problemhäftena för åren 1937—1942 äro slutsålda.

Särtrycken sändas portofritt om inbetalning sker å tidskriftens postgiro 527 55 (skriv rekvisition å girokupongen). Även genom bokhandeln.

Redaktion och expedition: C. E. Blom, Karlbergsvägen 16IV, Stockholm Va. Postgiro 527 55.

Insänd litteratur.

Ur serien Actualités Scientifiques & Industrielles, Hermann & Cie, Paris:

No. 769. L. WERTENSTEIN, *Radioactivité*, (1939), 116 s., 60 fr.; No. 774. M. PRETTRE, *Réactions en chaînes*, (1939), 65 s., 50 fr.; No. 785. E. DARMOIS, *Progrès récents dans l'étude de la structure des solutions électrolytiques*, (1939), 64 s., 50 fr.; No. 796. E. DARMOIS, *Aspects chimiques des théories modernes de l'électrolyse*, 40 fr.; No. 805. J. GUÉRON, *Réactions bimoléculaires*, (1939), 86 s., 75 fr.; No. 807. N. BOHR, *Quantum d'action et noyaux atomiques*, (1939), 28 s., 25 fr.; No. 894. P. CHOUARD, m. fl., *Les idées modernes sur la mécanisme de la photosynthèse*, (1941), 62 s., 50 fr.; No. 928. M. J. DUCLAUX, *Physique colloïdale et Biologie*, (1942), 44 s., 30 fr.; No. 929. M. J. DUCLAUX, *Chimie colloïdale et Biologie*, (1942), 43 s., 30 fr.; No. 945. E. DARMOIS, *L'activité des solutions électrolytiques*, 40 fr.; No. 946. G. RIBAUD, *Constantes thermodynamiques des gaz aux températures élevées*, (1943), 50 s., 30 fr.; No. 948. R. POTIER, *La chimie théorique et ses rapports avec la théorie corpusculaire moderne*, (1943), 90 s., 65 fr.; No. 1009. M. HAÏSSINSKY, *Electrochimie des substances radioactives et des solutions extrêmement diluées*, (1946), 67 s., 125 fr.

G. A. BOUTRY, *Optique instrumental*, Masson & Cie, Paris 1946, 539 s., 1100 fr.

G. JULIA, *Cours de géometrie*, Gauthier-Villars, Paris 1941, 508 s., 600 fr. — *Exercices de géometrie*, Gauthier-Villars, Paris 1944, 264 s., 180 fr.

P. DUBRIEL, *Algèbre I*, Gauthier-Villars, Paris 1946, 304 s., 585 fr.

H. VUIBERT, *Problèmes de Baccalauréat (Mathematiques)*, 14e éd., Librairie Vuibert, Paris, 1945, 524 s., 87 fr. 50.

F. MICHAUD, *Problèmes de physique avec solutions expliquées*, a l'usage des candidats au certificat d'études supérieures, Librairie Vuibert, Paris, 1946, 204 s., 240 fr.

B. N. WORSNOP and F. C. CHALKLIN, *X-Rays*, Methuen's Monographs, London 1946, Pp. 126, 5 s. net.

H. T. OPPENSHAW, *A Laboratory Manual of Qualitative Organic Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1946, Pp. 95, 6 s. net.

FLETCHER-MILLER-ROSENHEAD, *An Index of Mathematical Tables*, Scientific Computing Service Ltd, London 1946, Pp. 450, 75 s. net.

A. D. MICHAL, *Matrix and Tensor Calculus*, J. Wiley & Sons, Inc., New York 1947, Pp. 132, $ 3.00.

P. G. HOEL, *Introduction to Mathematical Statistics*, J. Wiley & Sons, Inc., New York 1947, $ 3.50.

N. E. FREMBERG, *Matematisk problemsamling, 1-betygskursen*, 3:e uppl., Lunds Studentkårs intressebyrå 1947, 54 s.

BLOM-KJELLBERG-SCHYTT, *Tentamensuppgifter i matematik för betyget B*, Gleerups förlag, Lund 1947, 73 s., kr. 7:50.

I. BOLIN och B. GUSTAVER, *Att laborera hemma Del I*, 150 kemiska försök, Teknik för Allas handböcker nr 15, Stockholm 1946, 78 s., kr. 3:75.

Tekniska Nomenklaturcentralens publikationer, Seelig & Co., Stockholm: Nr 8, Benämningar o. beteckningar inom hållfasthetsläran (1946), 34 s., 2 kr.; Nr 10 a—e, Ordsamling (1946), 66 s., 2 kr.; Nr 11, Korta uppsatser om ord och uttryck publicerade under 1946, (1947), 51 s., 1 kr.

RYDBERG-WAHLSTRÖM, *Matematiska uppg.*, reallinjen vt 1881—aug. 1946, Svenska Bokförlaget, Stockholm 1946, kr. 1:30.

VERKSTÄDER FÖR FRAMSTÄLLNING AV

LABORATORIEGLAS, MEKANISKA OCH ELEKTRO-MEKANISKA ARBETEN M.M.

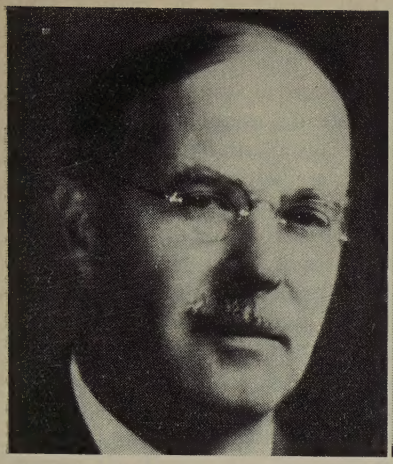
Vi inbjuda till ett besök i våra

moderna utställningslokaler

Utställning, fabrik och kontor

MALMSKILLNADSGATAN 48 C

Telefon: 23 37 80 (växel)



J. B. SUMNER

J. H. NORTHROP

Nobelprisen i kemi 1946.

Av professor KARL MYRBÄCK, Stockholm.

De tre amerikanska forskare, J. B. SUMNER, J. H. NORTHROP och W. M. STANLEY, som erhållit 1946 års Nobelpris i kemi, äro alla biokemister. De arbeten som prisbelönats äro typiskt biokemiska arbeten, dvs. innebära en tillämpning av kemiens lagar och arbetsmetoder på ämnen och reaktioner, som äro karakteristiska för den levande cellen. Att en sådan tillämpning är möjlig, har ju de senaste ca 100 årens forskning inom den biologiskt inriktade organiska kemien till fullo visat.

Utvecklingen inom denna gren av kemien, som kan sägas börja med Wöhlers berömda syntes av urinämne 1828, har ju ställt utom allt tvivel, att ämnen, som produceras av levande organismer och alltså äro i ordets ursprungliga betydelse organiska ämnen, icke i princip skilja sig från andra ämnen. En aldrig sinande ström av exempel har visat, att ämnena i de levande cellerna kunna beskrivas, t. ex. genom kemiska formler, på samma sätt som andra ämnen och att de reaktioner, varav cellernas livsyttringar äro sammansatta, lyda samma lagar som reaktionerna in vitro. Därmed är naturligtvis ingalunda sagt, att vi ännu kunna beskriva alla i levande material förekommande ämnen genom struktur-

formler eller dylikt eller kunna helt överskåda de många samtidigt förlöpande och i varandra ingripande reaktionerna eller i samtliga fall förstå deras mekanism. Många på biologisk väg bildade ämnen ha en struktur, för vilken vi ännu icke funnit en formel- eller modellmässig bild. Trots de utomordentligt viktiga rön, som gjorts exempelvis angående äggvitans byggnad, sväva vi tydligen fortfarande i okunnighet om principiellt viktiga moment i strukturen, vilka just konstituera den egentliga äggvitans karakteristiska egenskaper. Och vad de i cellen förlöpande reaktionerna angår, så äro ju fortfarande många frågor, i synnerhet om arten av de därvid verksamma katalysatorerna och deras mekanism obesvarade. Oklarheten om äggvitans byggnad gör sig, som vi skola se, starkt gällande just inom enzymforskningen.

Att de för en levande cell karakteristiska reaktionerna framkallas av ämnen, som kunna utöva sin verkan in vitro, sedan de skilts från cellen, ha vi vetat sedan mer än 100 år tillbaka. Sådana ämnen kalla vi enzymer. (Termen ferment, som emellanåt användes, är numera likabetydande men enzym.) Det är klart, att dessa ämnen, just genom sin katalytiska verkan, som emellanåt är enorm i förhållande till mängden katalysator, måste vara synnerligen intressanta från kemisk synpunkt. Enzymforskningen har också sedan länge tillhört de aktuellaste områdena inom såväl organisk kemi som fysiologi. Ihågkommas bör också, att enzymforskningen har stor betydelse för vissa industrier, t. ex. jäsningsindustrierna.

Det är ju naturligt, att uppgiften att framställa enzymer i ren form skulle vara lockande för kemisterna. Arbete i denna riktning har också pågått länge; den moderna utvecklingen kan sägas börja ungefär vid slutet av första världskriget. Under 1920-talet utfördes ett oerhört omfattande arbete på enzymreningens område. Goda resultat nåddes mången gång. Man framställde t. ex. av vissa enzymer preparat, som voro 10 000 gånger så aktiva som utgångsmaterialet. Länge föreföll emellertid målet, dvs. framställningen av ett enzym i garanterat ren, helst kristalliserad form, synnerligen avlägset, och mången torde nog i tysthet ha ansett, att det låg i problemets natur att det var olösligt. Utbytena vid reningsoperationerna (det rörde sig framför allt om absorptioner och elutioner) var ofta synnerligen dåligt. De renaste preparaten fick man mestadels i så utomordentligt små mängder, att den kemiska undersökningen måste bli ganska fragmentarisk. Man ansåg sig icke ha stöd för antagandet, att enzymerna tillhörde någon känd klass av substanser, och mången kände sig nog böjd att tro, att enzymerna representerade en helt ny ämnesgrupp, en tanke som ju icke alls förefaller orimlig.

Stort uppseende väckte därför 1926 ett meddelande av James B. Sumner, att han lyckats framställa enzymet ureas i kristalliserad form. Detta enzym, som hydrolyserar urinämne (slutprodukterna äro ammoniak och kolsyra), förekommer särskilt rikligt i frön av vissa ärtväxter. Som utgångsmaterial för framställning av ureaslösningar hade man tidigare i regel använt soyabönor. Sumner hade emellertid funnit, att fröna av en annan ärtväxt, Canavalia ensiformis, odlad särskilt i Västindien, ha en mycket högre enzymhalt. Extraherar man de finmalda fröna med vatten innehållande 32 % aceton eller alkohol, så går största delen av ureasen i lösning, och kyler man det klara extraktet till 0°, så avsätta sig så småningom små oktaedriska kristaller, som visa en utomordentligt hög ureasaktivitet. Då Sumner kunde visa, att aktiviteten icke förändrades vid omkristallisation, antog han att kristallerna representera det rena enzymet.

Denna uppfattning kritiserades emellertid mycket starkt från skilda håll. Då kristallerna visade sig kemiskt sett bestå av en globulin, ville man göra gällande, att enzymet utgjorde en mycket ringa del av preparatet och var absorberat på äggvitan i kristallerna. Det var ju också rätt naturligt, att i synnerhet de herrar, som offrat år av högkvalificerat arbete på renframställning av olika enzymer utan slutgiltig framgång, skulle känna sig misstrogna mot uppgiften, att man kan renframställa ureas genom några få banalt enkla operationer. Det bör i rättvisans namn tilläggas, att bakom Sumners metod, som ju söker sin like i enkelhet, naturligtvis låg långvarigt och intensivt arbete.

Sumner tog intet nämnvärt intryck av kritiken; i början tämligen ensam, höll han envist fast vid åsikten, att hans kristaller verkligen voro kristaller av ren ureas. Så vitt författaren kan bedöma läget, dröjde det emellertid nästan 10 år, innan den Sumnerska upptäckten blev allmänt erkänd, även om enstaka forskare tidigare blevo övertygade. Under årens lopp har emellertid det ena stödet för hans uppfattning efter det andra frambragts. Nämnas kan t. ex. att genom arbeten av Sumner och andra vid fysikalisk-kemiska institutionen i Uppsala visats, att ureaskristallerna innehålla ett i ultracentrifugen enhetligt ämne med molekylarvikten 483 000.

Numera lär väl ingen egentligen betvivla, att de kristalliserade preparat av ureas och andra enzymer, som av olika forskare framställts, äro att betrakta som de rena enzymerna. Till att befästa denna föreställning torde utom Sumners grundläggande arbeten ha bidragit framför andra de utomordentligt mångsidiga och grundliga undersökningar över renframställning av särskilt vissa

proteolytiska dvs. äggvitelösande enzymer, som sedan omkring 1930 utförts av John H. Northrop och hans medarbetare, främst M. Kunitz, vid Princeton University. Genom dessa arbeten har renframställts det sedan länge kända enzymet pepsin i magsaften och dess i magslemhinnan förekommande modersubstans (proenzym), pepsinogen. Vidare har det ävenledes länge kända trypsinet i pankreaskörtelns sekret vunnits i kristalliserad form. Northrop kunde också visa, att i pankreassaften jämte trypsinet förekommer ett annat proteolytiskt enzym, chymotrypsin, så kallat emedan det visar en typisk chymosin- dvs. löpeverkan. Även chymotrypsinet har kristalliserats. Både trypsin och chymotrypsin förekomma i körteln som inaktiva proenzymer. Dessa, trypsinogen och chymotrypsinogen, ha likaledes framställts i ren form, och deras övergång i de aktiva enzymerna, ett fenomen som länge förorsakat vidlyftig diskussion, har klarlagts.

Vid enzymrening enligt Northrop är väsentligt, att arbetet sker i mycket koncentrerade lösningar. Reningen sker framför allt genom ändamålsenlig extraktion, fraktionerad fällning med ammoniumsulfat eller liknande utsaltningsmedel, i vissa fall absorptioner osv.

Efter de här nämnda pioniärarbetena ha såväl Sumner och Northrop som också många andra forskare lyckats kristallisera ytterligare ett antal enzymer. Antalet har så småningom blivit så stort, att man inte längre finner meddelandet om ett nytt kristalliserat enzym så uppseendeväckande.

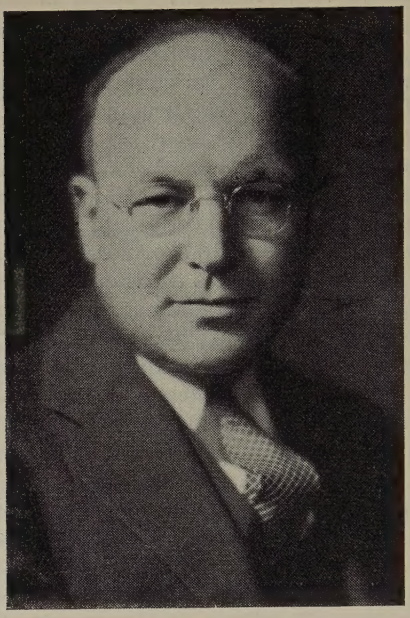
Naturligtvis frågar i synnerhet den, som ej själv sysslat med enzymforskning, vad de nu prisbelönta arbetena givit för resultat, som tydligen på vissa håll anses vara av så utomordentligt värde. Svaret blir, att de äro den grund, eller åtminstone en av de grunder, på vilka allt kommande arbete angående enzymernas natur och verkningssätt måste byggas. Tillsvidare måste man därvid emellertid medge, att icke sådana resultat nåtts, som mången hoppats på. Man kunde ju möjligen föreställa sig, att hade man bara ett rent enzym, så skulle det vara en smal sak att klargöra dess verkan. Men det är onekligen en sak att fastställa, att ureas är ett äggviteämne, som skall hänföras till gruppen globuliner, och en annan sak att förklara, varför det har sin karakteristiska verkan på urinämne. I detta avseende har Sumners och Northrops arbeten ännu icke burit de frukter, man har rätt att vänta sig.

Då det numera icke erbjuder särskilda svårigheter att framställa åtminstone vissa enzymer i ganska stora mängder, har man kunnat underkasta dem analyser av olika slag. Därvid har framgått, att de alla äro äggviteämnen, och kristallerna synas, som

också genast påpekades av Sumner, icke på annat sätt skilja sig från »vanliga» äggvitekristaller än att de ha den specifika aktiviteten. Visste man icke, att de Sumnerska kristallerna sönderdela urinämne, skulle man anse dem vara måttligt intressanta kristaller av ett i växter förekommande äggviteämne.

Under det att många enzymer, som ha med biologisk oxidation och reduktion att göra, ha karakteristiska s. k. prostetiska grupper (järnhaltiga färgämnen och dylikt, som i många fall kunnat t. ex. med spektroskopiska metoder påvisas, långt innan enzymerna vunnits i ren form), så synas de hydrolyserande enzymerna sakna dylika grupper och vara enkla äggviteämnen. Genom kemisk analys har intet i deras struktur kunnat påvisas, som skulle principiellt skilja dem från andra äggviteämnen. Man får väl antaga, att någon skillnad finnes, om man inte vill tro att verkan som hydrolyserande enzym är karakteristisk för stora grupper av nativa äggviteämnen överhuvudtaget och att endast specifitet och absolut aktivitet växla från fall till fall, en tanke som åtminstone författaren icke finner orimlig.

Hur underligt det än kan låta, är det faktiskt svårt att ge en fullt tillfredsställande definition av begreppet enzym. Man brukar säga: Ett enzym är en av levande celler bildad (en del författare tillägga »högmolekylär») substans med viss katalytisk verkan. I detta uttryck får man då inlägga meningen, att ett enzym är ett ämne, vars verkan sammanhänger med en speciell kemisk struktur. Det har tidigare annars icke saknats teorier, som velat se enzymverkans väsentliga grund i exempelvis en viss dispersitetsgrad i ett kolloidalt system, varvid den kemiska strukturen skulle vara av underordnad betydelse. I de nu rätt många fall, där enzymer vunnits i ren form, har man som nämnts funnit dem vara enkla eller sammansatta äggviteämnen (proteiner eller proteider). Det torde få anses högst sannolikt att alla enzymer bestå av eller innehålla äggvita. Troligen kan därför definitionen förenklas till: enzymerna äro katalytiskt verksamma äggviteämnen. Författaren anser för sin del det icke vara osannolikt att man en gång kommer till uppfattningen, att alla eller till vissa grupper hörande nativa äggviteämnen äro enzymer.



W. M. Stanley

Det kan antagas, att Northrops arbeten, som här ovan skisserats, voro utgångspunkten för de av W. M. Stanleys arbeten, som fört till renframställning och kristallisation av vissa virus.

De första virusarterna upptäcktes redan på nittiotalet. Som virus betecknade man sjukdomsalstrare så små, att de icke kunde mikroskopiskt iakttagas, passera bakteriefiltra etc. Virusforskningen var till en början helt inriktad på patologien, först för något tiotal år sedan har den blivit biokemisk.

Ett stort antal sjukdomar hos människa, djur och växter (angiospermer) ha så småningom konstaterats vara virussjukdomar. Bland sådana hos människan kunna nämnas influensa, koppor, gula febern och barnförlamning. Ehuru var och en numera utan hämningar talar om virus, är det inte så lätt att ge en strikt definition av begreppet. Tills vidare får man nöja sig med att säga, att virus är små sjukdomsalstrare med speciella egenskaper, som skilja dem från bakterierna. De kunna icke som dessa odlas eller växa på artificiella substrat, men inkomma de i cellerna hos

en lämplig »värdorganism» (djur, växt eller bakterie), så visa de en karakteristisk reproduktionsförmåga. Härvid användes ordet reproduktionsförmåga med avsikt i stället för det i detta sammanhang mindre lämpliga ordet fortplantningsförmåga. Under reproduktionen kunna virus förändras till sin karaktär (»mutera»).

Särskilt på icke-kemiskt håll har mycket skrivits och talats i frågan om en viruspartikel är en levande organism eller en molekyl. Ett alldeles bestämt svar kan icke ges; frågan är kanske också av mera filosofisk natur. Anser man, att för en levande organism är karakteristiskt, att den har en ämnesomsättning, så förefaller det icke troligt att virus äro levande. Man kan ju inte undgå att tycka frågan vara intressant; frågan om skillnaden mellan levande och död materia har ju alltid varit ett älsklingsobjekt för spekulativa andar.

Söker man avgränsa virus från annat biologiskt material, så finner man, att man i varje fall icke kan använda partikelstorleken som grund. Denna varierar nämligen över ett mycket stort område. Vissa virus ha partiklar mindre än vissa erkända äggvitemolekyler, andra t. ex. vaccinvirus ha partiklar större än vissa bakterier.

Det först upptäckta av alla virus, tobakmosaikvirus, som ger den s. k. mosaiksjukan hos tobaksplantan, var också det första som genom Stanleys arbeten vanns i ren och, så vitt man kan förstå, kristalliserad form. Tobakmosaikvirus kristalliserar i smala stavar, som rent av kunna ses med hjälp av en vanlig lupp. De ha visat sig innehålla 94 % äggvita och 6 % nukleinsyra. Överhuvud synas många virus kunna karakteriseras som nukleoproteider. Situationen blir då här densamma som i fråga om enzymerna: Ingenting annat synes skilja dem från »vanliga» nukleoproteider än deras förmåga att åstadkomma fysiologiska förändringar hos värdorganismen.

Möjligen kan som en egendomlighet anföras, att nukleoproteiden i tobakmosaikvirus synes ha en från det vanliga något avvikande sammansättning i fråga om aminosyrorna. I de vanliga nukleoproteiderna, t. ex. från spermatozoer, finnas ju de basiska aminosyrorna i överskott; detta synes icke vara fallet i fråga om äggvitan i tobakmosaikvirus. Dennas sammansättning är ganska väl känd: Omkring 15 aminosyror ha kvantitativt bestämts, varvid konstaterats, att de alltid uppträda i samma relativa mängder.

Viruspartikelns längd är ungefär 280 mμ, dess diameter ca 15 mμ. Den synes vara uppbyggd av mindre sinsemellan lika enheter i ett hexagonalt mönster. Först denna högre struktur medför, så vitt man hittills vet, aktiviteten. Partiklarna kunna i viss mån betraktas

som submikroskopiska kristaller, vilka yttermera kunna aggregera med tvådimensionell regelmässighet till de synliga kristallerna.

Partikelns kristalliknande byggnad och frånvaron av vatten däri synes utesluta, att något slags ämnesomsättning kan förekomma.

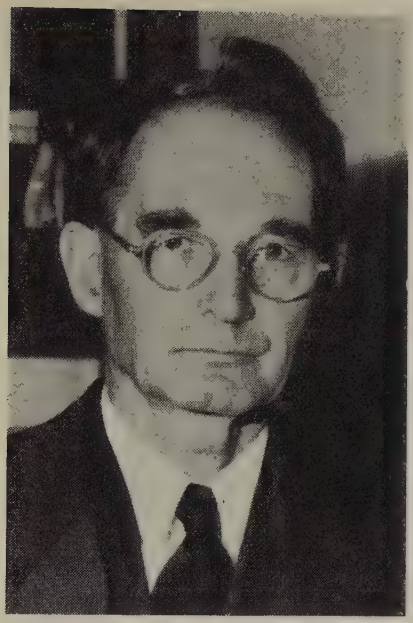
Några andra virus ha också framställts i ren och kristalliserad form, ytterligare några i antagligen ren form utan att dock kristaller kunnat vinnas. I vissa fall är sammansättningen mer komplicerad än hos tobakmosaikvirus, dock icke mer invecklad än hos vissa äggviteämnen. Ingen betvivlar dock att vi här ha att göra med molekyler.

Man kan kanske här liksom i fråga om enzymerna säga, att renframställningen av substanserna icke medfört ett förstående av deras verkan. Genom Stanleys arbeten har emellertid en fast grund lagts, på vilken forskningen kan bygga vidare. En betydelsefull utveckling är också att vänta.

James Batcheller Sumner är född 1887. Han har studerat bl. a. vid Harvard University, där han blev fil. dr 1914, samt vid universitetet i Bryssel. Redan 1914 blev han assistant professor vid Cornell University i Ithaca, N. Y., och är sedan 1929 ordinarie professor i biokemi vid samma universitet. Sumner har studerat frågor rörande den kristalliserade ureasen också i samarbete med svenska vetenskapsmän i Stockholm och Uppsala och har flera gånger vistats längre tider i Sverige. Utom ett stort antal uppsatser i tidskrifter har han bl. a. utgivit en lärobok i biokemi.

John Howard Northrop är född 1891. Efter studier på skilda håll blev han fil. dr 1915. Redan följande år knöts han till Rockefeller Institute for Medical Research i Princeton, N. J., där han fortfarande är verksam. Han har bl. a. utgivit en bok om de kristalliserade enzymerna, som ger en mycket läsvärd sammanfattning av hans arbeten.

Wendell Meredith Stanley är född 1904. Efter studier, bl. a. i München, blev han fil. dr 1938. Sedan 1931 är han knuten till Rockefeller Institute for Medical Research i Princeton.



P. W. Bridgman

Nobelpriset i fysik 1946.

Av docent J. O. LINDE, Stockholm.

De arbeten för vilka P. W. Bridgman tilldelades 1946 års nobelpris i fysik gälla ett område av fysiken, som kan benämnas de höga tryckens fysik. De resultat han under en lång och målmedveten forskningsverksamhet uppnått vid tryck, som vida överstiga vad som framställts på något annat håll, ha intresse såväl för fysiken som för angränsande vetenskaper, speciellt geologien.

Några huvudpunkter av de höga tryckens fysik och av Bridgmans insatser på detta område skola här lämnas.

Tryckapparatur. De tryck varom här är fråga äro allsidiga tryck av storleksordningen tusen, tiotusen ända till över hundratusen atmosfärer, som erhållas genom sammanpressning av en vätska eller ett plastiskt material. Man är härvid, på grund av de mycket svårlösta hållfasthetsproblem som uppstå, hänvisad till att

arbeta med relativt små volymer, högst några tiotal cm³, vid de allra högsta trycken långt mindre. Vid tiden för Bridgmans första arbeten för ca 40 år sedan låg gränsen för de tryck man lyckats uppnå vid ca 3000 atmosfärer (i det följande anges trycken i at = 1 kp/cm²). Denna gräns var helt och hållet betingad av svårigheten att få tillräckligt god tätning av apparaturen vid högre tryck. Bridgman lyckades emellertid redan vid början av sina arbeten lösa tätningsproblemet med hjälp av en ny packningsprincip.

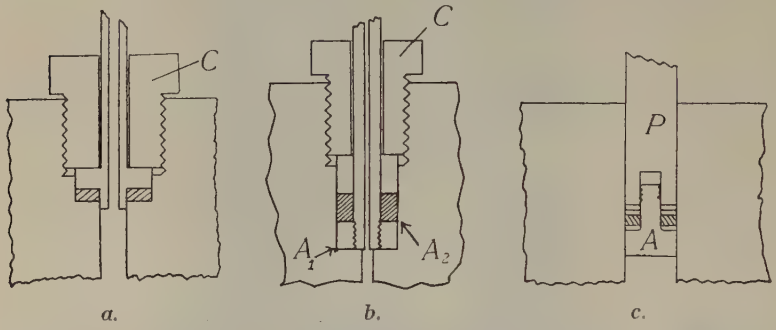


Fig. 1 *a* och *b*. Packning av rörförbindelse vid höga tryck enl. Amagat (*a*) och Bridgman (*b*). Fig. 1 *c*. Packning av rörlig pistong enl. Bridgman. Packningen markerad genom snedstreckning.

I fig. 1 *a* och *b* illustreras packningen vid en rörförbindelse; i *a* återges den av Amagat, en av föregångarna inom högtrycksfysiken, använda packningsmetoden och i *b* Bridgmans. Vid den förstnämnda ligger packningsmaterialet på utsidan av rörflänsen, och det tryck som kan uppnås utan att läckning inträder bestämmes av att trycket av skruven *C* på packningen måste vara större än vätskans tryck på densamma. Vid Bridgmanpackningen ligger packningsmaterialet på insidan av rörflänsen och begränsas på motsatta sidan av en lös stålring, som trycker mot skruven *C*. Storleken av den kraft som vill driva röret utåt är bestämd av trycket i vätskan multiplicerat med den cirkulära ytan A_1 (bortsett från tvärsnittet av den smala kanalen i röret). Under förutsättning att röret med fläns har frihet att röra sig utåt — vilket är ett nödvändigt villkor för metoden — kommer nämnda kraft att verka på den ringformiga ytan A_2 av packningen. Specifika trycket (p_2) i packningen kommer därför att ständigt vara högre än motsvarande tryck i vätskan (p_1). Antaga vi nämligen, att trycket i packningen är homogent, måste följande relation gälla

$$p_2 A_2 = p_1 A_1$$

varav följer, att p_2 är större än p_1 i samma proportion som A_1 är större än A_2. Man får därför effektivare tätning ju högre trycket är, under förutsättning att packningsmaterialet ej kan krypa ut genom mellanrummet mellan flänsen resp. stålringen och cylinderväggen. En annan fördel med denna tätningsmetod är, att man ej behöver något nämnvärt förtryck på packningen vid anläggning av trycket. Fig. 1 *c* visar anordningen enligt samma princip vid en för alstring av trycket rörlig pistong. — Av ovanstående inses, att Bridgmans packningsprincip ej kan tillämpas vid bägge ändarna av en rörförbindelse utan att speciella anordningar vidtagas, som möjliggöra den nödvändiga rörelsen av tryckkärl och rörförbindelse relativt varandra.

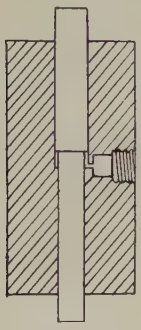


Fig. 2. Fritt rörlig differentialpistong för mätning av höga tryck.

Fig. 3. Stålrör som sprängts av inre tryck. Bristningen har börjat på utsidan och gått inåt.

Tryckmätningen kan intill tryck av viss storlek (ca 10 000 at) ske med en anordning enl. fig. 2. Idéen härstammar från Perkin (1826) och har använts såväl av Bridgman som av andra högtrycksforskare. En i ett stålblock fritt rörlig pistong (plunge), som även kan bringas i rotation, varigenom friktionen elimineras, har i övre hälften större diameter än i den nedre. Kraften, som vill driva pistongen uppåt, kompenseras med vikter, som anbringas på densamma. Genom att noggrant uppmäta diametrarna kan man beräkna det uppåt verkande trycket på pistongen. Enligt denna princip har Bridgman kunnat göra direkta tryckmätningar upp till tryck av 13 000 at. För högre tryck användes en sekundär metod, som är mycket användbar även vid lägre tryck. Den grundar sig på tryckberoendet hos det elektriska motståndet i en metalltråd. Metoden infördes först av svensken Lisell (1902), som

använde manganin som motståndsmaterial. Motståndet hos denna legering har låg temperaturkoefficient och relativt hög tryckkoefficient ($+ 2{,}32 \cdot 10^{-6}$ at^{-1}), som dessutom i det närmaste är oberoende av trycket. Bridgman har använt denna metod med manganin som motståndsmaterial upp till mycket höga tryck. (Författaren till denna uppsats har vid egna undersökningar upp till 3000 at utexperimenterat en annan legering, Ag med en viss halt av Mn, som har ca 50 % högre motstånds-tryckkoefficient än manganin och även i avseende på temperaturoberoende motstånd har bättre egenskaper än manganin. Det må i detta sammanhang framhållas, att det givetvis är betydelsefullt, att man genom användning av mer än ett motståndsmaterial har möjlighet till viss kontroll av tryckmätningar, som grunda sig på extrapolering av kurvor erhållna vid lägre tryck.)

Bristningsfenomen. Gränsen för de tryck som kunna uppnås med en viss apparatur bestämmes, sedan tätningsproblemet elimineras, av materialhållfastheten hos de apparatdelar som utsättas för de farligaste påkänningarna, vilket i regel är tryckcylindern och ej pistongen. När flytgränsen för materialet i cylinderväggarna väsentligt överskrides, sker en bristning oberoende av väggtjockleken. Bridgman har vid sina undersökningar kunnat påvisa många intressanta effekter i samband med bristningsförloppet. Rätt oväntat är t. ex., att en cylinder ej börjar brista från insidan utan från utsidan såsom framgår av fig. 3.

Mätresultat.

Gasers kompressibilitet. Enligt Bridgmans mätningar vid tryck upp till 15 000 at kan volym-tryckberoendet för de permanenta gaserna återges med relationen (a och b konstanter)

$$p[v - (a - bp)] = \text{konst.}$$

Sambandet skiljer sig från det som tidigare antagits gälla enligt mätningar av andra högtrycksforskare vid lägre tryck genom tillkomsten av termen med konstanten b. I fig. 4 är produkten $p \cdot v$ återgiven som funktion av trycket vid konstant temperatur. Vid 15 000 at har som synes produkten uppnått värdet 16 för kväve och 6 för helium, då dess värde vid vanligt tryck är nära = 1.

Vätskors kompressibilitet. Bridgman indelar på grundval av sina undersökningar vätskorna i tre huvudgrupper med avseende på kompressibiliteten. Till första gruppen hör endast glycerin, som vid rumstemperatur minskar 13,4 % i volym för ett tryck av 12 000 at. Till andra gruppen hör vatten, etylklorid och etylbromid med en volymminskning av 20 % och till tredje gruppen

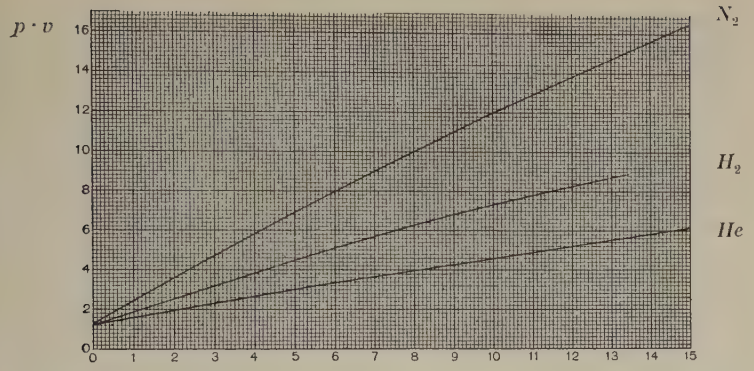


Fig. 4. Produkten $p \cdot v$ som funktion av trycket (i tusental at) för kväve, väte och helium.

övriga vätskor med en volymminskning av ca 30 % för trycket 12 000 at. Kvicksilver, som ej ingår i denna indelning, minskar sin volym med endast 4 % för samma tryck. Av stort intresse äro resultaten över vattnets kompressibilitet vid olika temperaturer och tryck. I detta liksom i så många andra avseenden uppvisar vatten karakteristiska anomalier. I fig. 5 äro kurvorna över vattnets specifika volym återgivna som funktion av temperaturen, med trycket som parameter. Man ser av kurvskaran, hur de anomalier som förefinnas för vattnets termiska utvidgning vid lägre tryck undergå

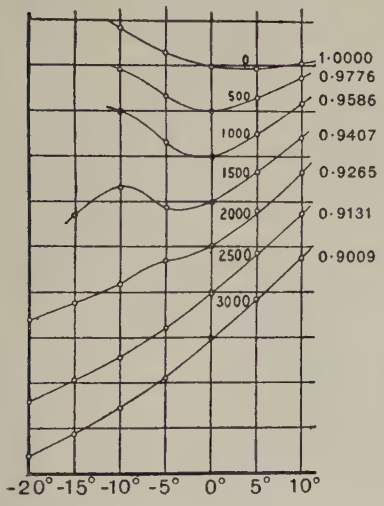


Fig. 5. Vattnets spec. volym som funktion av temperaturen vid några tryck, angivna i at på kurvorna. Varje skaldel på ordinataxeln motsvarar 0,002 cm^3. Talen till höger angiva volymen i cm^3 av 1 g vatten vid 0° C och tillhörande tryck. Av utrymmesskäl ha kurvorna parallellförskjutits avsevärt vid inritningen.

förändringar vid högre tryck för att slutligen för tryck över ca 2500 at helt försvinna.

Fasta ämnens kompressibilitet. Den lägsta kompressibiliteten synes diamant äga med kompressibilitetskoefficienten $\alpha = 1{,}8 \cdot 10^{-7}$ at^{-1}. För alkalimetallerna gäller, att kompressibiliteten ökar med ämnets atomnummer vid vanligt tryck men avtar med ökat tryck och detta i olika grad för olika metaller, så att vid tryck över ca 8000 at kalium är den mest kompressibla av alkalimetallerna.

Omvandlingsfenomen. Särskilt intressanta förhållanden uppvisar vanlig is vid höga tryck. Utom Bridgman har bl. a. den tyske forskaren Tammann gjort undersökningar häröver. Enligt Bridgman existerar det ej mindre än sju olika former av is, som äro stabila inom var sitt område av tryck-temperaturdiagrammet. Omvandlingarna ge sig till känna genom diskontinuerliga ändringar av volymen vid bestämda tryck resp. temperaturer. Den vid vanligt tryck stabila formen, som är specifikt lättare än vatten, och vars smältpunkt därför sjunker med trycket, har ett existensområde upp till ett tryck av 2200 at, där smältpunkten ligger vid $-22°$ C. De vid högre tryck stabila formerna äro specifikt tyngre än vatten, varför smältpunkten stiger med trycket och ligger för en av dem så högt som vid ca $+175°$ C. För kvicksilver, som i likhet med de flesta ämnen sammandrar sig vid stelnandet, ligger smältpunkten vid $\pm 0°$ C för trycket 7640 at. Denna punkt är mycket väldefinierad och kan därför användas som fixpunkt vid kalibrering av tryckmätare.

Enligt undersökningar av Bridgman omvandlas vanlig gul fosfor till en modifikation svart fosfor vid ett tryck av 12 000 at. Denna form har till skillnad från såväl gul som röd fosfor, men i likhet med fosfors närmaste grannar i periodiska systemet, kisel och arsenik, metallisk ledningsförmåga. Sedan svart fosfor en gång bildats vid det höga trycket och en temperatur av 200° C, visar den sig överraskande nog stabil även vid tryck och temperatur av ordinär storlek.

Frågan huruvida ett kritiskt tillstånd förefinnes för övergången vätska resp. gas till fast form i analogi med kritiska värdet för temperaturen för övergången gas-vätska, synes av resultat som vunnits av Bridgman och andra kunna besvaras nekande. Det synes nämligen vara möjligt att överföra ett ämne i fast form vid hur hög temperatur som helst, blott trycket göres tillräckligt högt.

Viskositeten för vätskor ökar i regel högst avsevärt med trycket. Vatten intar även härutinnan en särställning, i det att dess viskositet i tryckområdet upp till ca 1500 at och (0° C) minskar med

trycket. Över detta tryck förhåller sig vatten som andra vätskor. Paraffin blir enligt Bridgman vid höga tryck hårdare än stål.

Elektriska motståndet hos metaller och legeringar minskar i regel med trycket. Undantag härifrån utgöra bl. a. kol, strontium och vismut, samt legeringen manganin, som ha positiv motstånds-tryck-koefficient. För vissa metaller, exempelvis barium, visar motståndet ett minimum vid visst tryck, och motstånds-tryck-koefficienten övergår alltså från negativ till positiv (för barium vid 8100 at).

Termoelektriska kraften mellan olika metaller visar enligt undersökningar av Bridgman rätt stora ändringar med trycket. Även inom en och samma metalltråd uppstå betydande termokrafter om olika partier av densamma ha olika tryck och temperatur.

Av väsentlig betydelse för Bridgmans fortlöpande framgångar att uppnå allt högre tryck har varit tillkomsten av nya förbättrade stålsorter, legerade stål och de s. k. hårdmetallerna (volframkarbid med kobolt som bindemedel). Inget av dessa material kan dock uppbära de ofantliga tryck av ända till 100 000 at som uppnåtts, utan härvid har principen med yttre stödtryck fått tillgripas. Bl. a. har den innersta delen av apparaturen omgivits av ett rum med lägre vätsketryck på ca 30 000 at. Bridgman har även använt en annan anordning, där tryckapparatens yttre begränsning gives konisk form och där man låter den kraft som pressar ned pistongen i tryckkammaren även få trycka in apparaten i dess helhet i en motsvarande konisk urborrning i ett stålblock. I bägge fallen erhålles ett inåtriktat mottryck på den vägg som skall uppbära det högsta trycket.

I denna sammanfattning har av utrymmesskäl ej kunnat redogöras för alla vid högt tryck undersökta fysikaliska effekter. Den intresserade hänvisas t. ex. till Bridgmans bok »The physics of high pressure», London 1931. Betr. undersökningarnas betydelse för geologien och geofysiken må endast framhållas, att de tryck Bridgman lyckats uppnå i laboratoriet äro av samma storleksordning som de som antagas råda några tiotal mil under jordens yta.

Percy Williams Bridgman föddes 1882 och erhöll sin utbildning vid Harvarduniversitetet, där han 1913—19 var biträdande professor, 1919—26 professor och från 1926 är professor i matematik och naturfilosofi, som professurens namn lyder. Han har bl. a. fått Nederländska vetenskapsakademiens guldmedalj och det s. k. Comstockpriset av Förenta staternas vetenskapsakademi.

Bevis för en tetraedersats.

Av fil. dr NILS JURINGIUS, Stockholm.

Fil. stud. Gösta Danielsson har på olika sätt i några intressanta artiklar i Elementa[1] bevisat, att för en tetraeder olikheten $R \geqq 3r$ gäller, där R och r äro radierna i de om- resp. inskrivna sfärerna. Ehuru man ur hans bevis kan dra slutsatser, som icke följa ur författarens framställning i Elementa,[2] ger dock framställningen där jämväl andra resultat. Kanske är det icke överflödigt att bevisa den där uttalade satsen:

Den minsta ytterellipsoiden till en tetraeder har en volym, som är 27 gånger större än den största innerellipsoiden till tetraedern.

Den största tetraedern inom en ellipsoid existerar, och de tetraedrar, för vilka maximum uppnås, äro inskrivna, då vilken som helst annan innertetraeder kan göras större och likväl förbli innertetraeder. Eftersom förhållandet mellan volymer är invariant gentemot varje affintransformation, transformeras en innertetraeder av maximivolym till en i en sfär inskriven tetraeder av maximivolym genom en affintransformation, som överför ellipsoiden i sfären. Den sistnämnda tetraedern har sina plan parallella med sfärens tangentplan i motstående hörn, vilket följer av att varje annan inskriven tetraeder förvandlas till en större genom ett annorlunda beläget hörns förflyttning till den punkt på sfären på samma sida om motstående plan, där tangentplanet är parallellt med detta, ty höjden mot detta plan uppnår då sitt maximum. Alla sträckor från en snittcirkel mellan sfären och ett plan till en punkt på sfären med till planet parallellt tangentplan äro lika långa. Alltså är den största tetraedern inom en sfär regelbunden.

Betrakta nu en given tetraeder T och ellipsoider omskrivna kring denna. Till vilken som helst av dessa ellipsoider, E, kan man finna en affintransformation, som överför densamma till en fix sfär O. Därvid transformeras T till en i O inskriven tetraeder T', och förhållandet mellan volymerna av T och E blir lika med förhållandet mellan volymerna av T' och O (invariant, som ovan nämnts). Om den minsta ytterellipsoiden till T transformeras på O, blir nämnda volymsförhållande maximum, varför T' i detta fall måste bli den maximala innertetraedern till O, dvs. enligt det föregående en i O inskriven regelbunden tetraeder.

Om S är volymen av den minsta ytterellipsoiden till tetraedern

[1] Elementa *28* (1945) s. 131, *29* (1946) s. 95 och s. 144.
[2] Elementa *24* (1941) s. 65—71 (särskilt s. 71).

med volymen T och S_0 är volymen av den kring en regelbunden tetraeder med volymen T_0 omskrivna sfären, gäller alltså relationen

$$\frac{S}{T} = \frac{S_0}{T_0}. \tag{1}$$

Den minsta yttertetraedern till en ellipsoid är omskriven kring densamma, enär varje annan yttertetraeder genom planens parallellförflyttning kan förvandlas till en mindre sådan och minimum uppnås. Förflyttas ett tangentplan så, att det fortfarande tangerar en sfär, från ett läge, för vilket tetraedern, begränsad av detta plan och tre fasta tangentplan till sfären, har minsta möjliga volym, så är momentet noll för den tangent, med vilken planets rotationsaxel i initialläget sammanfaller (enligt beviset för Guldins andra regel). Alltså går tangenten genom masscentrum för gränstriangeln i tangentplanet. Man kan välja en godtycklig tangent genom planets kontaktpunkt till initialvridningsaxel. Rör sig kontaktpunkten t. ex. längs en storcirkel vilken som helst genom den punkt, där minimitetraederns rörliga tangentplan tangerar sfären, rör sig axeln vinkelrätt däremot. Alltså tangera planen i den minsta yttertetraedern till en sfär denna i masscentrum för den i ifrågavarande plan belägna gränstriangeln. Då en triangels medianer av dess masscentrum delas i förhållandet 2 : 1 från hörnen räknat, framgår ur transversalsatsen, att varje gränsplan för en minimitetraeder omkring en sfär är parallellt med planet genom de tre övriga tetraederplanens kontaktpunkter. Enligt det föregående äro således kontaktpunkterna hörnen i en regelbunden tetraeder. Den ursprungliga tetraedern är likformig med denna och alltså regelbunden.

Den affintransformation, som avbildar en ellipsoid på en sfär, avbildar alltså den minsta yttertetraedern till ellipsoiden på en kring sfären omskriven regelbunden tetraeder. Härav följer i analogi med föregående fall, att, om s är den största innerellipsoiden till den givna tetraedern med volymen T och s_0 är volymen av den i en regelbunden tetraeder med volymen T_0 inskrivna sfären, gäller

$$\frac{s}{T} = \frac{s_0}{T_0},$$

varav på grund av (1) och sambandet mellan radierna hos de om- och inskrivna sfärerna till en regelbunden tetraeder

$$\frac{S}{s} = \frac{S_0}{s_0} = 27.$$

Då detta är förhållandet mellan volymerna av den minsta ytterellipsoiden och den största innerellipsoiden till den givna tetraedern, måste förhållandet mellan volymerna av tetraederns om- och inskrivna sfärer vara $\geqq 27$. Förhållandet mellan radierna i dessa sfärer måste alltså vara $\geqq 3$.

Dessutom ser man av metoden, att en tetraeders minsta ytterellipsoid är likställd till dess största innerellipsoid i förhållandet 3 : 1 med det gemensamma centrum som likställighetspunkt.

Då av alla kroppar med fix volym sfären har den minsta möjliga ytan, framgår, att den ytterellipsoid till en *regelbunden* tetraeder, som har den minsta ytan, är den omskrivna sfären.

Analogt men enklare kunna motsvarande satser för planet bevisas: Förhållandet mellan ytorna hos en triangel och såväl dess till arean minsta ytterellips som dess till arean största innerellips är konstant. Den förra ellipsen är likställd till den senare i förhållandet 2 : 1 med avseende på deras gemensamma centrum. Den kring en liksidig triangel omskrivna cirkeln är dess till båglängden minsta ytterellips.

Nydöpta grundämnen.

I ett föredrag i Leeds den 29 oktober 1946 uttalade F. A. Paneth att om upptäckten av ett grundämne visar sig vara förhastad, bör man övergiva det valda namnet och sätta ett nytt, då det verkligen blivit upptäckt. De verkliga upptäckarna böra ha rätt att välja det definitiva namnet. Därför böra namnen 43 masurium, 61 illinium, 85 alabamin och 87 virginium avskaffas.

I Nature 4 jan. 1947 ha C. Perrier och E Segrè döpt element 43 till technetium, formel Tc, av τεχνητός, konstgjord. På svenska torde stavningen *teknetium* vara lämplig. Elementet framställdes redan 1937 av de nämnda herrarna genom bombardemang av Mo med deuteroner eller neutroner. Namnet valdes, emedan det är det första konstgjorda elementet.

I samma tidskrifthäfte ha D. R. Corson, K. R. Mackenzie och E. Segrè döpt nr 85 till astatine, formel At, av ἄστατος, obeständig. Denna halogen har nämligen ingen känd stabil isotop. Den framställdes redan 1940. B. Karlik och T. Bernert ha i Wien 1942 funnit starka indicier på att flera isotoper därav även finnas i naturen. Då mot engelska chlorine, bromine och iodine svarar svenska klor, brom och jod, torde man på svenska böra kalla denna substans *astat*. Sammansättningarna bliva astatväte, astatider, perastatsyra osv.

Mlle M. Percy påvisade redan 1939 elementet 87 som en naturlig isotop, akticium K. På Paneths uppmaning har hon nu utsett ett namn, som kan användas för alla möjliga isotoper av nr 87, och har valt *francium*, formel Fr. Liksom de i fjol döpta 95 americium och 96 curium kan francium överflyttas till svenska utan förändring.

Kemistsamfundets nomenklaturutskott.

Det matematiska sannolikhetsbegreppet.

Av docent G. ELFVING, Helsingfors.

1. Intresset för sannolikhetskalkylen har som känt växlat ansenligt under tidernas lopp. Efter att från sin uppkomst på 1650-talet och fram till sin kodifiering genom LAPLACE 1812 ha varit föremål för de mest betydande matematikers undersökningar upphörde den att utvecklas, och en sekellång stagnation inträdde. De talrika från denna tid härstammande läroböckerna i ämnet uppvisa en tämligen olikformig samling hasardspelsproblem, kompletterad med betraktelser över s. k. geometriska sannolikheter, med fel- och utjämningsteori, stundom även med livförsäkringsmatematik. Vagheten i de grundläggande begreppen, klyftan mellan de kombinatoriska och de »geometriska» problemen ävensom tillämpningsfältets snävhet gjorde att hela teorien erbjöd en föga tilltalande anblick. »Sannolikhetskalkylen bidar ännu sin Weierstrass», sade man på 1880-talet.[1]

Vår egen tid har emellertid fått uppleva sannolikhetskalkylens renässans; i detta nu är den otvivelaktigt en av matematikens mest omhuldade grenar och stadd i intensiv expansion. Utvecklingen kan härvid sägas ha följt tre huvudlinjer, var och en med sin historiska bakgrund.

Den äldsta linjen representeras av den anglosaxiska matematisk-statistiska skolan, grundlagd av KARL PEARSON omkring sekelskiftet och senare berömd bl. a. genom R. A. FISHERS arbeten. Upphovet till denna skola var det behov av exakta hypotesprövningsmetoder, som gjorde sig gällande bland de engelska evolutionsbiologerna — Darwins och Galtons lärjungar. På liknande sätt har tillämpningarnas — främst atomfysikens — behov angivit den andra av de ovan åsyftade expansionsriktningarna, i det de gett upphov till den nu så ivrigt bearbetade teorien för stokastiska processer.

[1] I denna tidskrift ingick omkring år 1930 en serie artiklar om sannolikhetskalkyl, författade av byråchefen Edvard Göransson; den illustrerar på ett intressant sätt, huru man vid denna tid erfor behovet av en förnyelse inom disciplinen ifråga. Denna förnyelse stod i själva verket för dörren: i seriens sista artiklar refererar förf. entusiastiskt grundtankarna i R. v. Mises' huvudarbete av år 1931 — vilket visserligen icke heller det har blivit vetenskapens sista ord i frågan.

Slutligen ha, för det tredje, själva grundvalarna för sannolikhetskalkylen blivit föremål för en genomgripande omprövning; den viktigaste insatsen på detta område har gjorts av den ryske matematikern Kolmogoroff i en berömd avhandling av år 1933. Bakgrunden för denna forskning utgöres av den allmänna mått- och integrationsteoriens mäktiga utveckling under tiden efter sekelskiftet, främst som följd av Borels och Lebesgues arbeten. Som dess resultat framstår i detta nu en tankebyggnad, som ifråga om exakthet icke står någon annan gren av matematiken efter. Vi skola i det följande ägna vår uppmärksamhet åt denna tankebyggnads grundvalar och dess förhållande till den fysiska verkligheten.

2. Den uppfattning av dessa frågor, som numera tämligen allmänt omfattas, bör ses mot bakgrunden av en viss allmän kunskapskritisk tendens i vår tid: forskningens strävan att klart särskilja å ena sidan den logisk-matematiska strukturen, å andra sidan det empiriska innehållet i vetenskapen.

Inom all exakt forskning uppträder den logiska slutledningen som hjälpmedel vid sidan av iakttagelsen: ur empiriskt funna eller hypotetiska premisser dras slutsatser, vilkas riktighet i sin tur prövas genom observation. Ofta uppträda samma slutledningar eller komplex av slutledningar upprepat och i de mest olika sammanhang. Detta sakförhållande kommer till uttryck i de inom modern forskning flitigt nyttjade termerna *schema* och *modell*. Schemat eller modellen är den matematiska bilden av den undersökta naturföreteelsen och samtidigt det slutledningsinstrument, som man applicerar på densamma. Enkla exempel på schemata erbjuda t. ex. den likformiga rörelsen eller förändringen, sinussvängningen, den exponentiella tillväxten osv. Matematiken kan, från naturforskningens synpunkt sett, sägas vara den rustkammare, i vilken alla ur tillämpningarnas behov framsprungna schemata — och dessutom otaliga andra — förvaras och ordnas.

En matematisk-naturvetenskaplig teori är ingenting annat än ett stort sammanhängande schema, avsett att täcka ett helt komplex av företeelser: den är ett logiskt system av begrepp och relationer, vilka *motsvara* sinnevärldens fenomen utan att äga deras obestämda karaktär. Har en teori utbyggts till sådan fullkomning, att dess samtliga satser kunna rent deduktivt härledas ur vissa noga redovisade, nödvändiga och motsägelsefria grundantaganden, då föreligger en *axiomatisering* av forskningsområdet ifråga. Det är allmänt bekant, att geometrien genomgått en utveckling av detta slag; detsamma är väsentligen fallet med den teoretiska mekaniken.

En axiomatiserad teori är *logiskt* oavhängig av den fysiska verkligheten: dess satser äro formellt riktiga, oberoende av den empiriska *tolkning* man ger dess begrepp och relationer. Detta utesluter givetvis icke, att teorien både historiskt och med avseende på sin fortsatta utbyggnad är intimt sammanvävd med sin naturvetenskapliga tolkning. Förhållandet mellan de båda är ett förhållande av växelverkan. Teorien levererar förutsägelser, giltiga under förutsättning att det matematiska schemat utgör en tillfredsställande bild av det föreliggande reella fenomenkomplexet — en förutsättning som givetvis oupphörligt måste underkastas förnyad prövning. Å andra sidan är det den naturvetenskapliga tolkningen, som stimulerar teorien till nya begreppsbildningar och anger dess utvecklingslinjer.

3. Den filosofiska debatten om sannolikhetsbegreppet har som bekant varit mycket livlig, och något slut på densamma kan knappast skönjas. Den matematiska sannolikhetsteorien torde däremot nu kunna anses tämligen grundmurad, och i huvudsak är man väl också ense om dess naturvetenskapliga tolkning: sannolikhetskalkylen är, så anser man, en teori för *slumpmässiga massföreteelser*, och den matematiska sannolikheten själv är enklast att tolka som en *rationalisering av den stabila statistiska frekvensen*. Vi vilja i det följande visa, huru teorien växer fram från denna empiriska utgångspunkt. I slutet av vår uppsats skola vi återkomma till frågan om dess tolkning; det skall därvid visa sig, att den här valda utgångspunkten ingalunda är den enda möjliga.

Låt oss, för att fixera begreppen, betrakta två enkla exempel:

(a) Vid ett av de klassiska Mendelska försöken korsas en röd- och en vitblommig ärtvarietet. I första generationen få alla avkomlingar ljusröda blommor; i den följande uppträda röd-, ljusröd- och vitblommiga individer i en proportion, som växlar från försök till försök men som, ifall individantalet är stort, fluktuerar omkring förhållandet 1 : 2 : 1.

(b) Vid maskinell tillverkning av ett visst slags spolkärnor av järnfilspån skall produkten ha en viss normalvikt om 15 g. På grund av okontrollerbara omständigheter fluktuerar likväl kärnornas vikt. Man intresserar sig för i vilken utsträckning de tillverkade exemplarens vikt faller utanför vissa medgivna toleransgränser, t. ex. 14,7 och 15,3 g. Tid efter annan företagna stickprov om låt oss säga 100 spolkärnor visa, att kassationsprocenten utgör ungefär 15 %.

I bägge exemplen är det fråga om en iakttagelse eller ett försök (uppdragningen och observationen av en enskild andragenera-

tionsplanta; tillverkningen och vägningen av en enskild spolkärna), som upprepas ett stort antal gånger under — ytligt sett — identiska betingelser. På grund av omständigheter, som ligga utanför vår kontroll, varierar försöksresultatet icke desto mindre slumpmässigt. I fråga om dess utgång kunna olika *elementarfall* eller *realisationer* ξ särskiljas: i (a) föreligga endast de tre fallen röd — ljusröd — vit, i (b) däremot beskrives »försökets» utgång medelst en kontinuerlig *slumpvariabel*, kärnvikten. Föremål för iakttagarens intresse kan vara antingen elementarfallen som sådana eller vissa sammanfattningar av dem, t. ex. »röd eller ljusröd», »vikt mellan 14,7 och 15,3 g»: i bägge fallen säga vi, att vi iaktta vissa *händelser* och beteckna dessa med bokstäverna A, B, ...

Grundvalen för det s. k. statistiska sannolikhetsbegreppet är det empiriska faktum — redan antytt i våra exempel — att frekvenserna för de olika vid försöket betraktade händelserna i allmänhet förete en märklig stabilitet. Om N betecknar totalantalet försök och $N(A)$ antalet försök, vid vilka händelsen A inträffar, visar det sig, att kvoten $N(A):N$ i långa försöksserier är nära nog konstant: ju längre försöksserien är, desto mer tycks denna kvot närma sig ett visst tal $P(A)$, som beror av försökets allmänna betingelser och av händelsen A men är detsamma i olika försöksserier. Denna hypotetiska »idealfrekvens» benämna vi *sannolikheten* för händelsen A. Här som i så många andra fall skapar alltså den mänskliga tanken ett abstrakt begrepp, avsett att fånga ett visst oföränderligt drag, en invarians, i vår omvärld.

Rationaliseringen av den stabila statistiska frekvensen utgör det första steget mot uppbyggandet av en matematisk teori för slumpmässiga massföreteelser. Med detta som utgångspunkt skola vi nu behandla de grundläggande egenskaper hos sannolikheten, som, exakt formulerade och försedda med nödig matematisk komplettering, bilda den axiomatiska grundvalen för sannolikhetskalkylen.

4. För att klart kunna särskilja den matematiska teorien från dess empiriska bakgrund skola vi till en början kläda vissa av de ovan introducerade begreppen i en abstrakt, mängdteoretisk form. Såsom förberedelse härtill är en kort exkurs till mängdläran måhända på sin plats.

Med en mängd avses inbegreppet av vissa väldefinierade objekt: dessa utgöra mängdens *element* eller *punkter*. Exempel på mängder från analysens område äro: mängden av talen 1, .., 10; mängden av alla hela positiva tal; mängden av alla punkter på reella axeln; mängden av alla punktmängder på reella axeln; mängden av alla reella funktioner; osv. Mängden A är en *delmängd* till

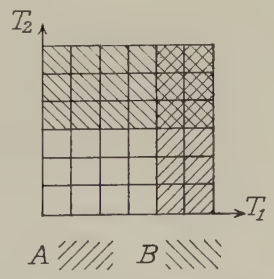
mängden E, om A:s samtliga element tillhöra E (som delmängder räknas också E själv, dess enskilda element, ävensom den »tomma» mängden O). I det följande tänka vi oss en viss grundmängd E såsom en gång för alla given; alla betraktade mängder A, B, .. äro delmängder till denna.

Med *summan* $A_1 + .. + A_n$ av två eller flera mängder avses mängden av alla element, som tillhöra åtminstone en av dessa. *Differensen* $A - B$ (där B är delmängd till A) är mängden av de element, som tillhöra A men icke B. *Produkten* $A_1 .. A_n$ är mängden av alla element, som tillhöra samtliga »faktorer» $A_1, .., A_n$. Speciellt är $AB = O$, om A och B äro *disjunkta*, dvs. sakna gemensamma element. Såväl summa- som produktbegreppet kan omedelbart generaliseras till ett uppräkneligt antal termer resp. faktorer.[1]

I vissa sammanhang intresserar man sig för särskilda system av delmängder till en given mängd. Ett sådant system S säges utgöra en *mängdkropp*, om de ovan beskrivna elementära operationerna aldrig leda ut från S, alltså om mängderna $A + B$, $A - B$ och AB städse tillhöra S, så snart detta är fallet med A och B. Sålunda bilda t. ex. alla mängder av rationella tal en mängdkropp inom mängden av alla reella tal.

5. Vi äro nu i stånd att ge sannolikhetskalkylens grundläggande begrepp och antaganden en rent matematisk formulering.

Utgångspunkten för våra betraktelser över sannolikhetsbegreppet var, som vi erinra oss, den slumpmässiga massföreteelsen med sina elementarfall eller *realisationer* ξ. Dessa utgöra *elementen* i en viss *grundmängd* E. De *händelser*, vilkas sannolikheter vi betrakta, utgöra sammanfattningar av ett antal elementarfall, och svara sålunda mot vissa *delmängder* i E.[2] Händelsen »åtminstone den ena av händelserna A och B inträffar» svarar mot mängdsumman $A + B$, händelsen »A inträffar, B icke» mot differensen $A - B$, händelsen »både A och B inträffa» mot produkten AB. Likheten $AB = O$ uttrycker att händelserna A och B utesluta varandra. En åskådlig bild av detta ger vidstående figur, som illustrerar de 36 möjliga realisationerna



[1] En oändlig mängd är *uppräknelig*, om dess element kunna ordnas i en enkel följd $e_1, e_2, \ldots$ Mängden av alla rationella tal är uppräknelig, mängden av alla reella tal icke.

[2] För att förenkla beteckningssättet använda vi samma beteckning för en händelse och motsvarande delmängd.

vid kast med två tärningar. A betecknar händelsen »minst 5 poäng på tärningen T_1», B händelsen »minst 4 poäng på tärningen T_2».

Föremålet för den matematiska teorien är givetvis icke den ena eller andra enskilda händelsen och dess sannolikhet, utan systemet av alla sannolikheter, som hänföra sig till ett visst försök. Vid elementära tillämpningar, sådana som den i figuren illustrerade, förefaller det självfallet att tillordna *alla* händelser A (alltså alla E:s delmängder) bestämda sannolikheter. Då grundmängden är av mera komplicerad beskaffenhet är detta icke längre möjligt, som t. ex. då det betraktade försökets realisationer beskrivas av en kontinuerlig variabel. Under sådana omständigheter måste de för sannolikhetsschemat grundläggande antagandena innehålla en klar redovisning av vilka händelser som förutsättas utrustade med sannolikheter och sålunda kunna bli föremål för teoriens slutledningar. För att de oupphörligt förekommande operationerna $A + B, A - B, AB$ aldrig skola leda ut från den betraktade kretsen av händelser, ligger det nära till hands att kräva, att denna krets skall utgöra en *mängdkropp*; vi förutsätta i det följande, att detta villkor är uppfyllt.

Låt oss nu betrakta en viss försöksserie, omfattande N försök, och låt, såsom tidigare, $N(A)$ betyda antalet försök vid vilka händelsen A inträffar. Då är den relativa frekvensen för A

$$P^*(A) = \frac{N(A)}{N}$$

en på grundmängden E definierad *mängdfunktion*, dvs. en funktion som har E:s delmängder $A, B, ..$ som argument. Man inser omedelbart, att denna funktion har egenskaperna

$$0 \leqq P^*(A) \leqq 1; \quad P^*(O) = 0; \quad P^*(E) = 1. \tag{1}$$

Den är vidare *additiv*: om A och B äro varandra uteslutande händelser, är $N(A + B) = N(A) + N(B)$; alltså är

$$P^*(A + B) = P^*(A) + P^*(B) \text{ om } AB = O. \tag{2}$$

Då de matematiska sannolikheterna äro avsedda att utgöra rationaliseringar av de stabila frekvenserna i långa försöksserier, synes det ofrånkomligt att tillägga dem de ovan anförda, för alla frekvenser karakteristiska egenskaperna: sannolikheten $P(A)$ måste sålunda vara en på mängden E definierad additiv mängdfunktion med de elementära egenskaperna (1). Av dessa äro f. ö. $P^*(A) \leqq 1$ och $P^*(O) = 0$ konsekvenser av de övriga och av likheten (2).

Till additivitetskravet har det befunnits ändamålsenligt att foga en utvidgning av formellt-matematisk natur, aktuell endast för oändliga grundmängder: man uppställer kravet, att mängdfunk-

tionen $P(A)$ skall vara *fullständigt additiv*, vilket innebär, att additiviteten skall gälla även för ett *uppräkneligt* antal parvis disjunkta summander. Denna fordran kan givetvis icke motiveras empiriskt, eftersom det icke är möjligt att empiriskt bestämma ett oändligt antal sannolikheter; den utgör ett av matematiska synpunkter dikterat krav på de schemata vi vilja taga med i teorien.

Vi kunna nu sammanfatta de grundbegrepp och grundförutsättningar, som våra betraktelser lett oss fram till, i följande definition, som kan sägas bilda den gemensamma ramen kring alla sannolikhetsschemata:

Definition. Låt E vara en viss mängd med elementen ξ (de vid ett visst försök möjliga realisationerna). Låt vidare $\mathfrak{F}$ vara ett visst system av delmängder (händelser) inom E, och $P(A)$ en för alla mängder i $\mathfrak{F}$ definierad mängdfunktion (sannolikheten). Vi antaga:

I. $\mathfrak{F}$ är en mängdkropp.
II. E tillhör $\mathfrak{F}$.
III. $P(A) \geqq 0$.
IV. $P(E) = 1$.
V. $P(A + B) = P(A) + P(B)$ om $AB = O$.
VI. Om $A_1, A_2, \ldots$ är en oändlig följd av parvis disjunkta mängder inom $\mathfrak{F}$, och om även mängden $A_1 + A_2 + \ldots$ tillhör denna mängdkropp, gäller

$$P(A_1 + A_2 + \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

Om alla dessa förutsättningar äro uppfyllda, säga vi att ett *sannolikhetsfält* $(E, \mathfrak{F}, P)$ föreligger.

Definitionen härovan innehåller Kolmogoroffs axiom. Dess innebörd kan korteligen sägas vara, att varje sannolikhetsschema utgör ett i ett visst *rum* infört *mått*.

Rummet ifråga har här fattats helt allmänt och abstrakt. Vid huvudparten av tillämpningarna kunna emellertid de möjliga fallen beskrivas medelst ett ändligt antal reella variabler, och sannolikhetsfältets grundmängd blir då helt enkelt en k-dimensional euklidisk rymd.[1] I denna konkreta gestaltning framställes det matematiska sannolikhetsbegreppet t. ex. av Cramér (1945).

[1] Oberoende av sannolikhetsfältets mängdteoretiska natur har man givetvis, vid alla probabilistiska överläggningar, oupphörligt att göra med olika med det betraktade försöket sammanhängande *tillfälliga storheter* eller, med en modern term, *stokastiska variabler*. En sådan är ingenting annat än en (mätbar) funktion $x = x(\xi)$, definierad i varje punkt av sannolikhetsfältet.

Det kan icke utan fog anses som en brist hos den här presenterade mått-teoretiska axiomatiken, att sannolikhetsfältets definition alls ingenting antyder om sammanhanget med de statistiska frekvenstalen. Dessa ha så att säga förvisats till teoriens icke-matematiska förgård. Den tyske matematikern v. Mises har gjort ett uppmärksammat försök att uppbygga en teori, avsedd att på denna punkt närmare ansluta sig till den naturvetenskapliga upprinnelsen. För detta ändamål skapar han av den »långa försöksserien» ett idealiserat *oändligt kollektiv* och definierar sannolikheten som den relativa frekvensens *gränsvärde* i detta kollektiv. v. Mises' teori har många tilltalande drag; i sin ursprungliga form blir den dock hängande i luften mellan matematiken och naturvetenskapen, för vag för att godtagas av den förra, för starkt rationaliserad för att höra hemma i den senare. Med något besvär synes teorien kunna räddas över till den matematiska sidan, men den förlorar därvid så mycket i enkelhet, att den mått-teoretiska uppläggningen avgjort synes vara att föredraga, desto mer som också denna, som vi skola se, leder fram till den statistiska stabiliteten.

6. Efter en flyktig blick på det axiomsystem som ovan presenterats är mången säkert böjd att fråga: Om själva det grundläggande begreppet sannolikhetsfält förutsätter, att alla uppträdande sannolikheter äro *a priori givna*, vilka uppgifter återstå då för den matematiska deduktionen, som väl måtte ha som huvudsyftemål att *beräkna* sannolikheter? Svaret härpå blir, generellt formulerat, följande: De fält, som uppträda i sannolikhetskalkylen, äro i regel icke explicit givna. Det som föreligger är fastmer vissa grundbeståndsdelar och en viss konstruktionsföreskrift, bägge i allmänhet förestavade av en eller annan tillämpning. Teoriens sak blir å ena sidan att visa, att de givna data faktiskt bestämma ett sannolikhetsfält, å andra sidan att explicit beräkna sådana sannolikheter, som i varje särskilt fall äro av intresse. Situationen är i viss mån densamma som t. ex. inom himmelsmekaniken, där planetsystemets rörelser äro bestämda genom element eller initialvärden i förening med vissa allmänna differentiallagar; teoriens uppgift är där dels att visa, att de givna data entydigt bestämma rörelsen, dels att förutberäkna densamma.

Vi skola i det följande söka framhäva vissa huvudlinjer, som sannolikhetskalkylen följer vid utbyggandet av nya schemata.

En första och nära till hands liggande nybildning utgöra begreppen *betingad sannolikhet* och *betingat sannolikhetsfält*. Låt oss betrakta ett visst försök som matematiskt beskrives med hjälp av

sannolikhetsfältet $(E, \mathfrak{F}, P)$ samt två speciella händelser H och A. För varje försöksserie i vilken $N(H) \neq 0$ gäller identiskt

$$\frac{N(HA)}{N(H)} = \frac{N(HA)}{N} : \frac{N(H)}{N}. \tag{3}$$

I en lång försöksserie ligger denna identitets högra membrum nära kvoten $P(HA) : P(H)$. Vänstra membrum utgöres av den »betingade frekvensen» för A under förutsättningen H, dvs. frekvensen för A i den »gallrade» serie, i vilken endast A-försök medtagits. Likheten (3) leder oss under dessa omständigheter till att som ett nytt begrepp införa den *betingade sannolikheten* genom definitionen

$$P(A|H) = \frac{P(HA)}{P(H)}; \tag{4}$$

denna storhet är tydligen att tolka som en rationalisering av den betingade frekvensen i en lång serie. Ur (4) följer trivialt den kända multiplikationsformeln

$$P(AH) = P(H) \cdot P(A|H). \tag{4'}$$

Om vi tänka oss den betingande händelsen H fixerad och låta A genomlöpa alla med H förenliga händelser, ger (4) oss sannolikheterna i ett nytt fält med grundmängden H, händelserna AH och sannolikheterna $P(A|H)$. Det kan lätt verifieras, att detta *betingade* fält uppfyller alla axiomen I—VI. Dess uppgift är, från tillämpningarnas synpunkt sett, att beskriva det försök, som erhålles då till det ursprungliga försökets betingelser fogas villkoret »H inträffar».

I nära samband med begreppet betingad sannolikhet står begreppet *oberoende händelser*. Antag att — på det empiriska planet — A och B äro två *kausalt* oberoende händelser, dvs. två händelser, mellan vilka vi icke kunna upptäcka något orsakssamband. Det är då tydligen att vänta, att den betingade frekvensen $N(AB) : N(A)$ i en lång försöksserie i allmänhet skall bli ungefär lika stor som den absoluta $N(B) : N$; visar sig detta icke vara fallet, äro vi självfallet benägna att förmoda ett dolt samband mellan de båda händelserna. Denna överläggning leder oss till att — inom teoriens sfär — introducera begreppet oberoende genom den formella definitionen: A och B äro oberoende om

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \tag{5}$$

7. Ovan föreställde vi oss ett visst sannolikhetsfält med alla sina (absoluta) sannolikheter som givet, de betingade sannolikheterna däremot som sökta. I många problem är förhållandet det

motsatta: Ett system av betingade sannolikheter tillika med vissa (men icke alla) absoluta sannolikheter dikteras av en eller annan tillämpning, och det gäller att konstruera det genom dessa data — i allmänhet entydigt — bestämda sannolikhetsfältet, m. a. o. att beräkna de felande absoluta sannolikheterna. Så är framförallt fallet då det gäller att bygga upp ett sannolikhetsschema för *kombinationen* av två — avhängiga eller oberoende — försök. Vi skola illustrera denna operation med ett enkelt exempel.

Två urnor U_1 och U_2 av lika utseende innehålla, den ena två vita och en svart kula, den andra en vit och en svart. Följande sammansatta »försök» utföres: Man väljer på måfå den ena urnan; ur denna drar man en kula samt noterar urnans nummer och kulans färg. Det gäller att konstruera ett sannolikhetsfält, som matematiskt beskriver detta försök.

Det är till en början klart, att det sökta fältets element utgöras av de fyra kombinationerna 1V, 1S, 2V, 2S. Det återstår att bestämma sannolikheterna.

Den första etappen i försöket motsvaras tydligen av ett fält med elementen 1 och 2. Symmetrien driver oss att tillordna vartdera elementet sannolikheten $\frac{1}{2}$; då vi här principiellt ställa oss på det statistiska sannolikhetsbegreppets ståndpunkt, innebär vårt val givetvis, att vi konstruera ett hypotetiskt schema, baserat på en omfattande erfarenhet av att symmetriska händelser i det långa loppet inträffa ungefär lika ofta. Av samma skäl tillskriva vi dragningen av en vit kula ur U_1 den *betingade* sannolikheten $\frac{2}{3}$, i den meningen att frekvensen av vita kulor i en lång följd av dragningar ur U_1 förväntas ligga nära nämnda tal. Motsvarande gäller om de övriga tre betingade sannolikheterna. Försöksbetingelserna ge oss sålunda dels primärförsökets absoluta sannolikhet och dels sekundärförsökets betingade sannolikheter. I det fält, vars uppgift det är att beskriva vårt försök som helhet, måste vi nu, för att de genom (4) definierade betingade sannolikheterna skola erhålla de önskade värdena, bilda de fyra elementarfallens sannolikheter enligt (4′). Hela operationen åskådliggöres av nedanstående schema:

$$\begin{array}{|c|} \hline \frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|} \hline \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \hline \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \hline \end{array}$$

På liknande sätt har man städse att förfara, då man vill sannolikhetsteoretiskt beskriva realisationsmöjligheterna vid ett kombinerat försök, vars senare fas beror av den förra fasens utgång. Försöksbetingelserna leverera ett primärfält $\{E_1, \mathfrak{F}_1, P(A_1)\}$ och ett

betingat sekundärfält $\{E_2, \mathfrak{F}_2, P_\xi(A_2)\}$ — indexet ξ antyder beroendet av primärförsökets utgång. Det sökta fältet erhålles sedan genom den operation, som vi just givit exempel på, och som lämpligen kan beskrivas som multiplikation av de två fälten. Att de föreliggande data faktiskt entydigt bestämma ett sannolikhetsfält med ett sådants alla egenskaper, var ju i vårt triviala exempel uppenbart. I mera komplicerade fall kan och måste fältmultiplikationen säkras genom en särskild sats, vars bevis icke är alldeles enkelt, och som, med större skäl än den enkla följdsatsen (4′), kunde benämnas sannolikhetskalkylens multiplikationsteorem.

Ett särskilt betydelsefullt specialfall av fältmultiplikationen är det, som svarar mot kombinationen av två *oberoende* försök. I detta fall ha vi att multiplicera två »autonoma» fält $\{E_1, \mathfrak{F}_1, P_1(A_1)\}$ och $\{E_2, \mathfrak{F}_2, P_2(A_2)\}$. En illustration härtill ger oss det ovan anförda urnexemplet, om vi modifiera det så, att de bägge urnorna innehålla vita och svarta kulor i *samma* proportion.

8. Genom successiv tillämpning av de operationer som ovan beskrivits kan man nu, utgående från enkla fält, bygga upp mer och mer komplicerade sådana.

Den klassiska linjen är härvid den, som inskränker sig till multiplikation av oberoende fält. Ett enkelt och välkänt exempel levererar det *Bernoulliska schemat*, vilket beskriver den n-faldiga upprepningen av ett försök med blott två alternativ — man kan tänka t. ex. på n kast med en slant. Här föreligger en produkt av n sinsemellan identiska, autonoma fält, vart och ett omfattande endast två element (se härom nedan). Detta tema varieras sedan inom sannolikhetskalkylen i olika riktningar, i det man dels låter faktorfälten beskrivas av mångvärdiga, eventuellt kontinuerliga variabler $x_1, .., x_n$, dels låter sannolikhetsfördelningen vara olika inom de olika fälten. Särskilt intresse har härvidlag summan $x_1 + .. + x_n$ tilldragit sig. Det visar sig som bekant, att densamma under mycket allmänna förutsättningar asymptotiskt följer den s. k. Gauss'ska fördelningslagen.

En annan betydelsefull linje kommer man in på, om man ersätter förutsättningen »oberoende försök» med det svagare antagandet »sannolikhetsfördelningen vid varje försök beror endast av det nästföregående försökets utgång». Vi stå då inför en s. k. *Markoffsk kedja*, formelmässigt beskriven medelst den symboliska produkten

$$\{E_1, \mathfrak{F}_1, P(A_1)\} \times \{E_2, \mathfrak{F}_2, P_{\xi_1}(A_2)\} \times \ldots \times \{E_n, \mathfrak{F}_n, P_{\xi_{n-1}}(A_n)\}. \quad (6)$$

Ett exempel härpå kunna vi skaffa oss genom utbyggnad av det tidigare nyttjade urnschemat på följande sätt: låt den ena urnan

vara vit, den andra svart, låt försöket omfatta n dragningar, och låt varje dragning (utom den första, vid vilken urnan väljes på måfå) företas ur den urna, vars färg kommit upp vid den näst föregående dragningen. — Också vid dessa schemata visar det sig, att den Gauss'ska lagen spelar in.

Från de ändliga fältprodukterna ligger det, matematiskt sett, nära till hands att övergå till oändliga sådana, alltså till tänkta oändliga serier av försök. Exempel härpå leverera redan de klassiska s. k. ruinproblemen, i vilka man frågar efter sannolikheten för att en spelare förr eller senare förlorar hela sitt kapital. Det är klart att detta slags problem — som ju f. ö. principiellt utesluta empirisk verifikation — kunna exakt behandlas endast på strängt axiomatisk grund.

Slutligen må nämnas det vidsträckta moderna forskningsfält som bildas av de — redan förut i förbigående nämnda — *stokastiska processerna*. Det är här fråga om sannolikhetsfält, i vilka varje element utgöres av en reell funktion $x(t)$; t är här en parameter, som anger tiden och som kan uppfattas som en kontinuerlig motsvarighet till de enskilda försökens indices i en fältprodukt sådan som (6). Här liksom överallt är det teoriens uppgift att bygga upp de nödiga sannolikhetsfälten av vissa empiriskt givna grundbeståndsdelar, vilka nu utgöras av differentiella medelvärden och spridningar, språngsannolikheter o. dyl.

9. Låt oss efter denna översikt av sannolikhetskalkylens huvudlinjer återvända till frågan om dess förhållande till verkligheten.

Utgångspunkten för våra betraktelser över det statistiska sannolikhetsbegreppet var den långa serien av oberoende och likartade försök, betraktade med hänsyn till en viss händelse A. Den matematiska motsvarigheten till en sådan försöksserie är tydligen det tidigare nämnda Bernoulliska schemat, alltså produkten av n autonoma, sinsemellan identiska fält, vart och ett med endast två elementarfall A och $\bar{A}\,(= E - A)$. Elementen i produktfältet utgöras tydligen av alla de 2^n möjliga serierna av formen $AA\bar{A}A\bar{A}\ldots\bar{A}A$, och sannolikheten för varje sådant element erhålles multiplikativt ur de för de enskilda försöken gällande sannolikheterna $p = P(A)$ och $q = P(\bar{A}) = 1 - p$.

Låt ν_n vara antalet A-resultat i försöksserien; ν_n är tydligen en i det betraktade produktfältet definierad stokastisk variabel. Med tanke på sannolikhetens ursprung i de statistiska frekvenstalen intressera vi oss givetvis speciellt för kvoten ν_n/n; i *praktiken* bör ju denna kvot — enligt den erfarenhet, som utgjorde utgångspunkten för våra betraktelser — ligga nära p om n är stort. Denna

förväntan bekräftas, på det *teoretiska* planet, av den berömda Bernoulliska satsen som, med de ovan införda beteckningarna, kan formuleras sålunda: *Till varje par* ε, η *av positiva tal kan bestämmas ett helt positivt tal* $n(\varepsilon, \eta)$ *sådant att*

$$P\left\{\left|\frac{\nu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} > 1 - \eta \text{ så snart } n \geqq n(\varepsilon, \eta). \qquad (7)$$

Det måste nu med eftertryck framhållas, att Bernoullis teorem är en rent matematisk sats, närmare bestämt en utsaga om en asymptotisk egenskap hos produktfält. Inom ramen för den statistiska sannolikhetstolkningen medger den emellertid självfallet en viss *tydning.*

Låt oss, för att fixera begreppen, tänka oss att det är fråga om kast med en slant ($p = q = \frac{1}{2}$), att vi fixerat »toleransen» $\varepsilon = 0{,}01$ för frekvenskvoten ν_n/n, och att vi likaså valt $\eta = 0{,}01$. En uträkning ger vid handen, att $n(\varepsilon, \eta) \approx 17.000$. Tänka vi oss nu ett stort antal kastserier utförda, var och en omfattande 17.000 kast, bör, enligt sannolikhetens frekvenstolkning, *kvoten* ν_n/n *i ungefär 99 % av dessa serier ligga mellan 0,49 och 0,51.*

För en *enskild* försöksseries vidkommande utsäger detta resultat absolut ingenting. Att så är fallet står i full överensstämmelse med vår teoris natur: dess satser gälla sannolikheter och endast sannolikheter. Det kan synas som om här skulle resa sig ett principiellt hinder för varje praktisk verifiering av probabilistiska slutledningar.

På denna punkt tarvas i själva verket en bro från teorien över till praktiken, och denna bro utgöres av det oftast outtalade men för varje tillämpning oumbärliga postulatet: En händelse betraktas som — för ett enskilt försöks vidkommande — *praktiskt* utesluten, om dess sannolikhet är mycket liten (i statistiken äro 0,05, 0,01, 0,001 vedertagna riskgränser; vilken av dem man väljer beror givetvis på den grad av trygghet man eftersträvar). Vi kunna kalla detta postulat *osannolikhetsprincipen.* Den för oss, så snart den »tillåtna risken» η fixerats, från det betingade påståendet (7) till det kategoriska

$$\left|\frac{\nu_n}{n} - p\right| < \varepsilon \text{ om } n > n(\varepsilon, \eta). \qquad (8)$$

Har tillämparen en gång för alla fastställt en rimlig riskgräns, är han, i kraft av osannolikhetsprincipen, i stånd att jämföra sina probabilistiska slutledningar med den experimentella verkligheten. Om de förra vinna bekräftelse, konstaterar han, att teorien fungerat till belåtenhet och använder den förty för fortsatta slutledningar och förutsägelser. Så har i själva verket skett i otaliga fall, och

denna överensstämmelse mellan teori och verklighet är i sista hand det avgörande för sannolikhetsschemats tillämplighet.

10. I och med ovanstående överläggning ha vi återvänt till vår utgångspunkt: den stabila statistiska frekvensen.

Det kan nu, vid flyktigt betraktande, synas, som vore Bernoullis teorem i det närmaste en truism, en upprepning — visserligen i kvantitativt preciserad form — av sannolikhetens »definition». Vi böra emellertid erinra oss, att hela frekvenstolkningen ingalunda innebär någon logisk definition utan blott tjänat oss som vägledning vid uppbyggandet av vår teori. Dennas slutsatser äro i själva verket giltiga för vilken som helst tolkning av begreppen »sannolikhet» och »oberoende försök», förutsatt blott att denna tolkning lämnar de nämnda begreppens grundegenskaper oantastade: »sannolikheten» måste ha karaktären av ett mått — dvs. den måste vara en positiv och additiv mängdfunktion — och antaga värdet 1 för den »säkra händelsen» (dvs. sammanfattningen av alla realisationer); och detta mått måste, vid kombination av »oberoende händelser», sammansätta sig multiplikativt. Gäller allt detta, då gäller Bernoullis sats; uppställa vi därutöver osannolikhetsprincipen som postulat, så gäller *praktiskt* slutsatsen (8), och därmed äro vi framme vid den statistiska stabiliteten *utan att ha utgått från den.*

Enligt det sagda är det möjligt att uppfatta sannolikheten helt enkelt som ett *hypotetiskt realiserbarhetsmått*, utrustat med vissa näraliggande formella egenskaper; ur dessa *framgår* — bland annat — sambandet med den stabila statistiska frekvensen. Den klassiska teoriens sannolikhet — definierad som kvoten av antalet gynnsamma och antalet möjliga fall — är att fatta just som ett dylikt mått, baserat på symmetrisynpunkter. Sålunda kan den moderna uppfattningen av sannolikhetsbegreppet sägas ha lett till en ärerädding för den tidtals något ringaktade klassiska definitionen; den senares svaghet ligger givetvis i att den täcker endast en ringa del av tillämpningarna.

Föreställningen om sannolikheten som ett hypotetiskt mått är ingalunda främmande för naturvetenskaplig praxis. Det synes tvärtom vara typiskt för den avancerade forskningen, att lärobyggnadernas grundläggande element — energi-innehållet, entropien, atomen, kvantet osv. — äro av hypotetisk natur och endast indirekt, *inom teoriens ram*, åtkomliga för iakttagelsen. Så är också i stor utsträckning fallet med de sannolikheter, som man i tillämpningarna opererar med. Ingen kan empiriskt bestämma »sannolikheten för att en viss molekyl befinner sig i en viss rymd-

cell» eller »sannolikheten för att personen A dör under loppet av ett visst år»; men man kan arbeta med hypotetiska sannolikheter för dylika händelser och på dem bygga upp en teori den där leder fram till empiriskt verifierbara slutledningar.

11. Sammanfattningsvis kunna vi konstatera, att den moderna uppfattningen av sannolikhetsbegreppet är på en gång fordringsfullare och mera anspråkslös än en äldre tids; och detta därför att den skarpt skiljer på den matematiska teorien och tillämpningarna.

Den förra, på vilken samma stringenskrav ställas som på varje annan gren av matematiken, kan korteligen beskrivas som *teorien för additiva mängdfunktioner, befruktad av vissa specifika principer*. Dess fundamentala begrepp är begreppet sannolikhetsfält. Dess typiska arbetsform är konstruktionen av nya fält ur givna. Dess kungslinje markeras av satserna om produktfälts asymptotiska egenskaper.

Från tillämpningarnas synpunkt sedd är sannolikhetskalkylen det *matematiska instrumentet för beskrivning av slumpmässiga massföreteelser*, och sannolikheten själv ett realiserbarhetsmått, tydbart som en rationaliserad statistisk frekvens. Vad tillämparen begär av teorien är helt enkelt, att den skall på ett praktiskt tillfredsställande sätt återge de undersökta företeelserna: om dess förutsägelser stämma, är allt väl.

Sedd i det perspektiv, som den moderna forskningen upprullat, förlorar sannolikhetskalkylen sin äldre, något brokiga prägel och framstår som en överraskande enhetlig tankebyggnad. I sitt förhållande till tillämpningarna illustrerar den på ett utmärkt sätt den typiska arbetsgången inom de matematiska vetenskaperna: Först sker ett nedstigande från realvärldens invecklade iakttagelsekomplex till enkla, till sina relationer exakt preciserbara element. Utgående från dessa följer så uppstigandet inom teoriens sfär till allt mer komplicerade begreppsbildningar, avsedda att återspegla företeelserna i den förnimbara världen.

Litteratur.

Cramér, H., Mathematical Methods of Statistics. Uppsala 1945. Särskilt s. 137—151.

Kolmogoroff, A., Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1933.

v. Mises, R., Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. 2 uppl., Wien 1936.

v. Mises, R. och Doob, J. L., Artiklar i Annals of Mathematical Statistics årg. 1941, s. 191—217.

Ett par nyare jonisationsvakuummetrar.

Av t. f. laborator TORSTEN JÖNSSON, Göteborg.

Under senare år har vakuumtekniken funnit allt mera vidsträckt användning inom forskning och industri. Många instrument, som måste hållas evakuerade genom kontinuerlig pumpning, ha kommit i allmänt bruk. Exempel på sådana instrument äro elektrondiffraktionskameran, elektronmikroskopet, cyklotronen, stora röntgen-, katodstråle-, televisions- och likriktarrör, apparater för metallisering i vakuum, etc. Inom biologien och bakteriologien förekommer frysning resp. högfrekvensupphettning i vakuum för vissa undersökningar. Vakuumteknikens industriella användning, tidigare i huvudsak begränsad till elektronrörs- och glödlampsindustrierna, har utsträckts till bl. a. livsmedels- och läkemedelsindustrierna. Denna utveckling är särskilt framträdande i U. S. A. och har där medfört ett ökat behov av bekväma och tidsbesparande instrument för mätning av vakuum, kontroll av vakuumanläggningar och »leak hunting». Många amerikanska instrumentfabriker ha därför tagit upp tillverkning av vakuummetrar.

Några *i princip* nya metoder för vakuummätning ha inte framkommit.

För rutinmätning användes fortfarande mest värmeledningsvakuummetrarna (termoelektriska manometern och Piranimanometern) samt urladdningsvakuummetrarna (jonisationsmanometern och Penningmanometern).[1] Förbättringarna ligga dels i mera ändamålsenlig konstruktion av själva manometerrören och dels i de elektriska arrangemangen. De senare byggas i kompakt, portabelt utförande. Genom att utnyttja elektronikens hjälpmedel (för likriktning, spänningsstabilisering, förstärkning, etc.) undviker man användning av batterier samt strömmätningsinstrument av ömtåligt slag. Växelströmsdrift tillämpas genomgående. Enheterna utföras praktiskt taget »idiotsäkra», så att de kunna skötas av vem som helst. Det förekommer även manometrar, försedda med automatiska arrangemang för registrering av trycket eller för

[1] Principerna för Pirani- och jonisationsmanometrarna äro beskrivna i Elementa *28*, sid. 151 ff.

manövrering av pumparna eller för alarmering vid inträffande läcka.

De absoluta vakuummetrarna, McLeodmanometern och Knudsenmanometern, äro fortfarande oumbärliga för kalibrering av de övriga. Knudsenmanometern, som grundar sig på radiometereffekten, användes inte mycket före kriget, därför att den var svår att tillverka och ömtålig. Nu är den kommersiellt tillgänglig i bekvämt och trevligt utförande.

Ett par intressanta jonisationsmanometrar, nämligen alphatronen och Penningmanometern, skola beskrivas i det följande. Alphatronen fördes i marknaden 1945 av National Research Corporation i Boston; den har konstruerats av J. R. Downing och G. Mellen. Penningmanometern utvecklades redan 1936—37 av F. M. Penning vid N. V. Philips' Gloeilampenfabrieken i Eindhoven. Den fördes i marknaden under benämningen Philipsvakuummetern men fick de första åren inte så stor användning. Numera tillverkas den på flera håll, dock inte längre av Philips', och saluföres av ett par firmor under benämningen kallkatodjonisationsvakuummetern. En av G. Picard, P. C. Smith och S. M. Zollers något modifierad konstruktion tillverkas av Radio Corporation of America (RCA) och ingår bl. a. i utrustningen för deras elektronmikroskop.

Alphatronen. Denna vakuummeter bygger på samma grundläggande princip som den vanliga jonisationsmanometern, nämligen jonisation av gasen och mätning av joniseringsströmmen. Jonisationen, som i den vanliga jonisationsmanometern sker genom stöt av accelererade elektroner från en glödkatod, åstadkommes i alphatronen medelst snabba α-partiklar (hastighet ca 1/20 av ljushast.).

Alphatronrörets konstruktion framgår av fig. 1. α-strålaren utgöres av ett bleck av 1 cm² storlek, som är försett med en beläggning av en guld-radium-legering, innehållande ca 0,2 mg radium. Skiktet skyddas för beröring med gasen i jonisationskammaren ävensom för radonförlust medelst en tunn nickelfilm. Preparatet, med radium i jämvikt med sina sönderfallsprodukter, håller emissionen av α-partiklar konstant under ca 4 år, varefter det får bytas ut. Jonisationsströmmen, som är av storleksordningen 10^{-10} amp per mm Hg, mätes med en känslig likströmsförstärkare, vars första steg är inbyggt i själva manometerröret. Antalet bildade jonpar per sek är vid lämplig dimensionering direkt proportionellt mot gastätheten, varför strömmen av positiva joner till kollektorelektroden blir en lineär funktion av trycket. Outputmetern kan därför graderas direkt i tryck, och skalan blir likformig. Detta gäller för alla gaser. Är mätinstrumentet graderat för torr luft,

har man vid mätning på en annan gas endast att dividera avläsningen med alphatronens »känslighet» i förhållande till luft för ifrågavarande gas. Relativa känsligheten för en blandning kan på grund av linearitet lätt bestämmas (fig. 2).

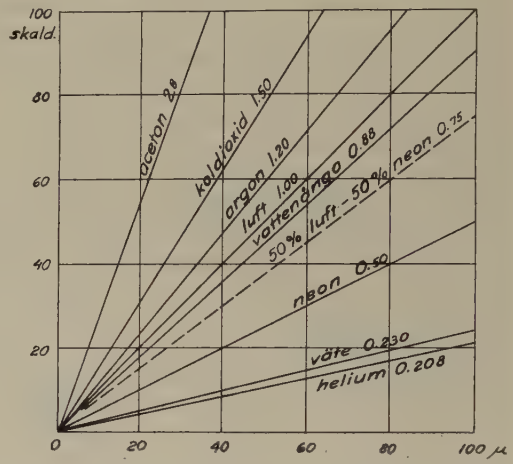


Fig. 2. Jonisationsströmmen (skald. på outputmetern) som funktion av trycket för alphatron (1 μ = 1 micron = 0,001 mm Hg). Siffrorna på kurvorna ange relativa känsligheten. Ur diagrammet bestämmes lätt relativa känsligheten för en blandning genom att man delar en ordinatdifferens för resp. kurvor i samma förhållande som blandningsförhållandet (exemplifierat för 50 % luft — 50 % neon).

Fig. 1. Manometerrör till alphatron, bestående av ett mässingsrör (diam. 3″), som är delat i två kammare. Vakuumkammaren innehåller en i botten perforerad jonisationskammare (a), en α-strålare (b), en kollektorelektrod, bestående av fyra stavar (c), en vakuumanslutning (d). Jonisationskammaren har positiv spänning i förhållande till kollektorelektroden. Denna är förbunden med styrgallret i 1:sta förstärkarsteget, som finns i rörets övre del och är anslutet till boxen (fig. 3) medelst en 10-ledarekabel (e).

Alphatronen har närmast utvecklats för att fylla behovet av en noggrann och bekväm vakuummeter för det inom den industriella vakuumtekniken vanligaste tryckområdet, nämligen 0,001 — 10 mm Hg. Detta område har varit bekymmersamt även ur laboratoriesynpunkt, varför alphatronen även för forskaren är ett välkommet

instrument. Det är möjligt, åtminstone teoretiskt, att genom lämplig dimensionering tillämpa alphatronprincipen för vilket tryckområde som helst.

Alphatronen är synnerligen robust, och i motsats till de flesta »elektriska» vakuummetrar förstöres den inte, om den utsättes för atmosfärstryck under drift. Den är ytterst lämplig för »leak hunting» enligt acetonmetoden.[1] Små läckor i ett vakuumsystem

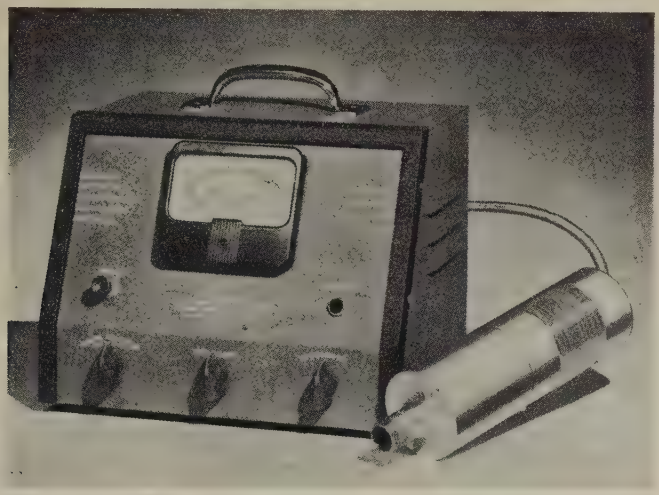


Fig. 3. Alphatron. Mätinstrumentet på boxpanelen är graderat i 100 delar och kan ställas in för tre mätområden. Vid mätning på torr luft betyder fullt utslag resp. 0,1, 1,0 och 10 mm Hg.

kunna upptäckas på så sätt, att man penslar utanpå med aceton (eller eter); finns en läcka, reagerar alphatronen omedelbart.

Penningmanometern. Denna vakuummeter grundar sig på strömstyrkans beroende av trycket i ett gasurladdningsrör vid självständig urladdning.[2] I ett rör av måttliga dimensioner upphör

[1] Under kriget har man i U.S.A. ägnat mycket intresse åt att uppfinna metoder för att upptäcka vakuumläckor. I atombombprojektet var åtskillig högvakuumapparatur engagerad, och det var ytterst angeläget, att arbeten inte stoppade upp på grund av vakuumfel. — Ett enl. uppgift mycket effektivt instrument för jakt på läckor är i princip utfört som en mass-spektrometer; närmare detaljer om detta instrument saknas ännu.

[2] En gasurladdning kallas självständig, om de för urladdningens upprätthållande erforderliga laddningsbärarna (elektroner och joner) bildas genom urladdningen själv utan annat yttre medel än den pålagda spänningen.

emellertid en dylik urladdning vid användning av likspänning eller lågfrekvent växelspänning redan vid ett tryck av 10^{-3} mm Hg, därför att jonisationssannolikheten blir för liten (vid spänningar av storleksordningen 1000 volt). PENNING fann emellertid, att man genom användning av ett magnetfält och lämplig elektrodanordning kan komma ett par tiopotenser lägre.

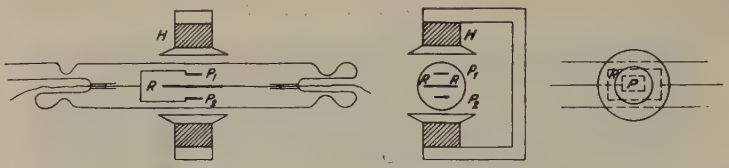


Fig. 4. Penningmanometer. Röret innehåller två sammankopplade, rektangulära katodbleck (P_1 och P_2). Mellan dem befinner sig anoden (R), som utgöres av en tråd, böjd i form av en rektangel. Elektrodsystemet är placerat mellan polerna av en permanent magnet (H).

Pennings första manometerkonstruktion framgår av fig. 4. Utan magnetfält skulle de från P_1 och P_2 kommande elektronerna röra sig i krökta banor direkt till anoden. Magnetfältet tvingar dem emellertid att röra sig i trånga spiraler omkring de magnetiska kraftlinjerna. De från t. ex. P_1 kommande elektronerna missa därför anoden och fortsätta mot P_2, där de kastas tillbaka av det retarderande elektriska fältet. Elektronerna komma att pendla

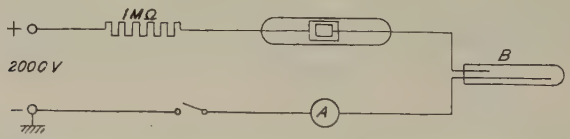


Fig. 5. Förenklat kopplingsschema för Penningmanometer. (Numera användes för det mesta växelströmsdrift.) Strömindikator är antingen ett elektriskt mätinstrument (A) eller ett glimrör (B).

mellan P_1 och P_2 flera gånger, innan de slutligen uppfångas av anoden. Deras löpsträcka ökas avsevärt och därmed även sannolikheten för joniserande kollisioner med gasmolekylerna. En självständig urladdning kan på så sätt underhållas även vid tryck så låga som 10^{-5} mm Hg.

En enkel Penningmanometerkoppling framgår av fig. 5. Manometern måste självfallet kalibreras mot en annan manometer (fig. 6). En praktisk indikator för sådana fall, där endast ringa noggrannhet erfordras, är ett neonfyllt glimrör med kort anod och lång, stavformad katod. Om glimröret dimensioneras så, att det

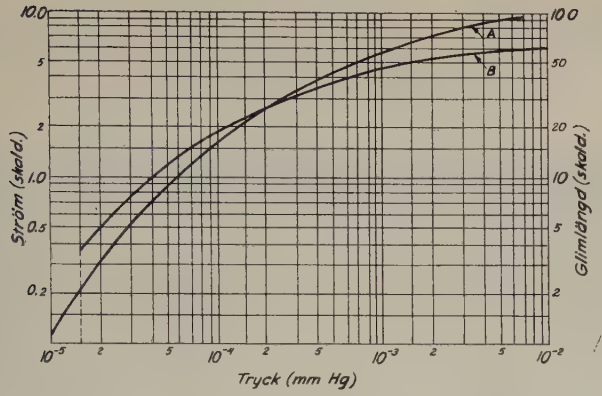


Fig. 6. Exempel på kalibreringskurva för Penningmanometer (A). Visar även hur längden av glimljuspelaren varierar med trycket (B).

arbetar inom området för normalt katodfall, kommer längden av glimljusbelägget på katoden att vara approx. proportionellt mot strömstyrkan. Man kan sålunda förse glimröret med en tryckskala. Användning av glimrör är särskilt praktisk i sådana fall, då man måste passa andra instrument samtidigt som man övervakar trycket. Den röda glimljuspelaren ser man, även om man inte har blicken direkt fästad på den.

Då Penningmanometern inte innehåller bräckliga eller upphettade delar, kräver den ingen särskild varsamhet vid hanteringen. Den har praktiskt taget obegränsad livslängd.

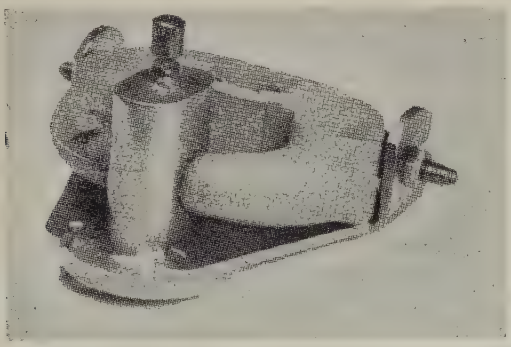


Fig. 7. Penningmanometerrör av RCA:s konstruktion med tillhörande magnet.

Utseendet av RCA:s modifierade Penningmanometer visas i fig. 7. Röret, som är av metall, med ovalt tvärsnitt, fungerar själv som katod; den rektangelböjda trådanoden är monterad mitt i röret med sitt plan vinkelrätt mot magnetfältet.

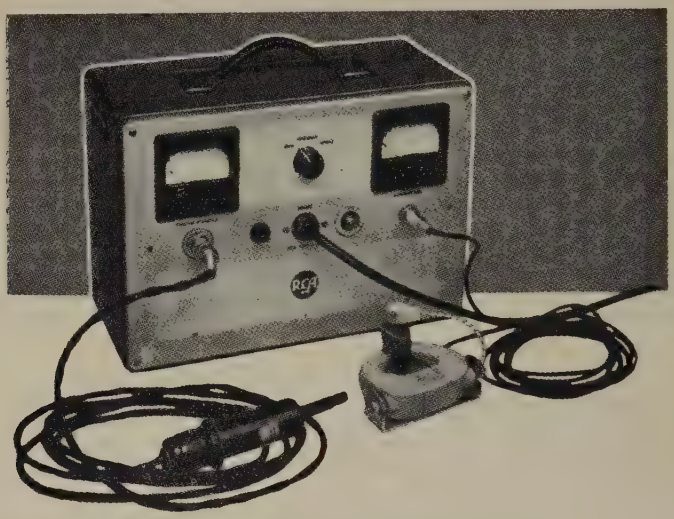


Fig. 8. Kombinerat instrument för mätning med termoelektrisk vakuummeter och Penningmanometer. (RCA.)

I fig. 8 visas slutligen exempel på en vakuummeterenhet för mätning med såväl termoelektrisk manometer som Penningmanometer; det totala mätområdet är $10^{-4} - 20$ mm Hg. Genom elektriska kontrollarrangemang, som här förbigås, är sörjt för att manometrarna inte skadas, om de utsättas för fullt atmosfärstryck. Instrumentet är närmast utvecklat för att användas vid pumpning av elektronmikroskop. Genom ett tillsatsarrangemang kunna manometrarna starta resp. stoppa pumparna, varigenom trycket alltid kan hållas vid rätt värde, utan att pumparna behöva hållas i gång ständigt.

Nya instrument inom de flesta av fysikens områden publiceras nu i rask takt. Sedan förestående uppsats skrevs (nov. 1946) ha flera modifikationer av Pennings manometer kommit till förf:s kännedom. De avvika dock inte mycket från RCA:s konstruktion. Ett par typer ha nästan lineär ström-tryck-kurva inom ett mindre tryckområde. Utomordentligt känsliga »leak detectors» enl. masspektrometer-principen ha publicerats från flera håll (jfr not 1, sid. 37).

Bestämning av luftens syrehalt vid kemiundervisningen i realskolan.

Av adjunkt HELGE ERIKSSON, Nyköping.

I samband med framställning av oxider i klasserna 4^5 och 3^4 brukar luftens syrehalt bestämmas. Det har visat sig svårt att finna en försöksanordning härför, som är tillräckligt enkel att utan svårighet kunna förstås och handhavas av de elever det här är fråga om, men som ändock ger ett någorlunda noggrant resultat och som slutligen är ofarligt. Fullt tillfredsställande har problemet ännu ej lösts.

Det av T. Moll införda försöket med järnpulver är enkelt och åskådligt och skulle vara förträffligt, om ej felkällorna vore ovanligt stora. Lektor Starck har därför i sin lärobok angivit en metod med användande av röd fosfor. Detta försök är utmärkt för mera försigkomna elever men väl komplicerat för eleverna i realskolan.

Vit fosfor skulle ju ligga nära till hands att använda. Den har dock ansetts för farlig att släppa i händerna på eleverna, och dessutom har antändningen av densamma vållat besvär. En metod med vit fosfor har publicerats av S. Forsman i Elementa *22*, 238 (1939). Sedan flera år tillbaka har jag, då tiden medgivit det, vid sidan av järnpulverförsöket använt vit fosfor och utfört försöket på följande sätt.

Ett preparatrör eller ett vanligt glasrör, som tillsmälts i ena änden, längd ung. 150 mm, diam. 20—25 mm, förses ungefär på mitten med en inbuktning, så att en avsats eller hylla bildas inne i röret. För att åstadkomma en sådan kan man gå tillväga på följande sätt. Röret värmes med en någorlunda spetsig blästerlåga på det ställe, där man vill ha avsatsen. När glaset blivit mjukt, tar man en ung. 10 mm bred rektangelformig remsa av metallplåt, håller den i spetsig vinkel mot röret och trycker in det mjuka glaset i riktning mot den slutna änden av röret. Vidstående fig. är en genomskärning av rörets mellersta del och visar, hur avsatsen lämpligen bör utformas.

När försöket skall utföras, placeras på denna avsats med hjälp av ett lämpligt verktyg, t. ex. en smal kniv, en bit torr vit fosfor, och röret, som måste vara torrt invändigt, placeras därpå i en skål med vatten. Röret nedsättes snett, så att vattnet tränger in i röret 15 à 20 mm. För att ej onödigtvis uppvärma röret bör det helst hanteras med hjälp av en provrörshållare. Vattenytan inne i röret markeras utan dröjsmål.

Därpå antändes fosforbiten på så sätt att en något uppvärmd glasstav hålles utanpå röret vid det ställe, där fosforbiten ligger. Den tänder sig strax och förbrinner i regel lugnt. När reaktionen tycks ha avstannat, är det lämpligt att ånyo värma fosforn med en varm glasstav eller ännu bättre med en helt liten bunsenlåga. Första tändningen får ej ske med låga. När röret antagit rumstemperatur, markeras läget av den nya vattenytan och volymerna uppmätas.

Markeringen av vattenytorna kan ske på olika sätt. Ett sätt är att på förhand förse röret med två ringar av sytråd eller bättre av mässingsplåt, som inställas vid vattenytorna. För att snabbt kunna fastställa den nedre ytans läge brukar jag förse röret med några ritsar nedtill, en lång rits, där vattenytan brukar inställa sig och på båda sidor därom några kortare ritsar. Med hjälp av dessa kan vattenytans läge snabbt avläsas. Den övre ytan brukar jag markera med en ring av mässingsplåt. Volymerna kunna bestämmas på olika sätt allt efter den noggrannhet man eftersträvar. Bäst vore naturligtvis att använda volymsgraderade rör, då vattenytornas lägen ej behöver markeras utan andast avläsas.

Det mesta av fosforresterna i röret kan avlägsnas med hjälp av provrörsborste. Återstoden lösgöres med en lämpligt formad järntråd. Det senare bör nog ej anförtros åt eleverna.

Givetvis kan ett glasrör, öppet i båda ändarna, även användas. Det slutes då med en passande gummipropp. I detta fall kan man ju få vatten att inträngа till lagom höjd utan att hålla det snett vid nedsättningen i vattnet, vilket kanske innebär en fördel.

Om det visar sig svårt att åstadkomma en lämplig avsats i glasrörets vägg att placera fosforbiten på, kan man tillverka en liten hylla av mässing på följande sätt. Ur en tunn mässingsplåt utklippes en remsa enligt vidstående fig. Remsan hopböjes till en ring, och det utskjutande partiet böjes inåt ringen, insättes i röret och kvarhålles av sin egen fjädring. På denna hylla placeras fosforbiten i kontakt med glaset. En hylla av glas är dock att föredraga.

Vit fosfor är visserligen farlig i ovana händer, men om varje elev av läraren får en lämplig bit och under hans direkta övervakande med hjälp av ett lämpligt verktyg inlägger biten på sin plats, torde ingen fara för olycksfall föreligga. Det är för övrigt lämpligt, att låta till försöket avpassade fosforbitar ligga i vatten och utsatta för dagsljuset några dagar, innan de användas. De överdragas då av en tunn brun eller violett hinna och äro då mindre farliga. Självantändning behöver knappast befaras.

Även om luftens syrehalt på ovan beskrivna sätt ganska enkelt och ofarligt kan bestämmas, bör järnpulverförsöket ej slopas. Det utföres först och främst för att ge svar på frågan, varifrån järnpulvret får det tillskott, som orsakar dess viktsökning vid upphettning i luft. Vill man ha ett noggrannare värde på luftens syrehalt, utföres försöket med fosfor i någon form.

Till läsekretsen.

Vad kommer tidskriften att innehålla under 1947? På den frågan vill red. svara, att riktlinjerna komma att bli desamma som hittills.

En av tidskriftens uppgifter är att ge orienterande artiklar över forskningens resultat. Den uppgiften torde för närvarande böra ägnas så stor omsorg som möjligt. Men stoffet är just nu överväldigande stort och tidskriftens utrymme synnerligen begränsat. Endast en ringa del av vad som skulle vara önskligt kan därför presenteras för läsekretsen. Om uppsatsernas antal inte kan bli så stort, finns det dock en möjlighet att sprida kännedom om vad som rör sig i tiden, och det är att sörja för en i möjligaste mån rikhaltig och mångsidig recensionsavdelning. Red. vill göra sitt bästa i detta avseende och har för den skull sökt och fått förbindelse med utländska förlag, från vilka tidskriften kan vänta, att i viss utsträckning erhålla nyutgiven litteratur.

I tidskriftens redaktionskommitté ha i år inträtt professor John Tandberg och förste aktuarien Stig Comét, vilka båda ägnat tidskriften stort intresse under många år.

I likhet med vad som är brukligt i flertalet tidskrifter kommer hädanefter författarnas namn att kompletteras med uppgift om karaktär och hemort. Upplysningar om recensenterna meddelas i slutet av avd. »Bokanmälningar».

Några upplysningar om innehållet i kommande häften må lämnas. Docent G. Elfving, Helsingfors, kommer att fortsätta orienteringen om sannolikhetsbegreppet med en artikel om några tillämpningar av sannolikhetskalkylen. Ekoradions principer är ämnet för en redan färdigskriven uppsats — för vilken tyvärr plats ej kunnat beredas i detta häfte — av ingenjör R. Ajger vid Marinförvaltningen; vid ekoradion använda rör komma att beskrivas av T. Jönsson, t. f. laborator vid Chalmers tekn. högskola. Upplysningar om de nya matematiska maskinerna hade varit önskvärda redan nu, men det har ansetts lämpligt att dröja något därmed. En uppsats om moderna hålkortsmaskiner planeras.

Red.

Meddelande från Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning.

Årsmötet den 7—8 januari 1947.

Årsmötet, som hölls på Tekniska läroverket vid Drottningholmsvägen i Stockholm, tog sin början kl. 9.30 i närvaro av ett hundratal av föreningens medlemmar. Mötesförhandlingarna inleddes med uppläsning av protokoll från föregående årsmöte, styrelseberättelse — se sid. 53 — och revisionsberättelse. Mötet biföll revisorernas hemställan om ansvarsfrihet för den avgående styrelsen och skattmästaren. Till ordförande för år 1947 omvaldes rektor Torsten Wetterblad. Samtliga förutvarande styrelseledamöter omvaldes utom adjunkt Sandén, som undanbett sig återval. Till nya medlemmar av styrelsen valdes rektorerna P. E. Martens och M. Kolmodin. Styrelsen för år 1947 består sålunda av 21 personer utom ordföranden. Till revisorer valdes adjunkterna Erik Jonsson (omvald) och Einar Strand (nyvald) och till revisorssuppleanter adjunkterna Nils Sjöberg (omvald) och Bernhard Elmgren (nyvald).

Sekreteraren redogjorde därefter för den pedagogiska skriftseriens ställning. Denna hade startats i förhoppning, att medlemmarnas intresse för saken skulle vara stort nog att ekonomiskt säkra utgivandet. Detta hade tyvärr ej varit fallet, varför styrelsen såg sig nödsakad att antingen upphöra med skriftserien eller begära medel av föreningen genom höjning av årsavgiften. För att få veta medlemmarnas inställning till frågan hade styrelsen vid utsändandet av inbjudan till årsmötet begärt svar på frågan, huruvida medlemmarna önskade ett fortsatt utgivande av skriftserien och i så fall, huruvida årsavgiften borde höjas. Av de inemot 200 svar som inkom var ca 75 % för ett fortsatt utgivande av skriftserien, men endast ca 60 % önskade en höjning av årsavgiften. Styrelsen föreslog årsmötet, att skriftserien skulle bibehållas och göras obligatorisk och att åtminstone vartannat år en ny del skulle ges ut samt att årsavgiften skulle höjas från 3 till 4 kronor. Detta blev också årsmötets beslut.

Efter några meddelanden om ändringar i programmet överlämnades ordet åt ingenjör R. Ajger, som talade om ekoradions principer. Ingenjör Ajger kommer att i en uppsats i Elementa be-

handla samma ämne, varför något referat av föredraget här inte lämnas. Det var meningen att mötesdeltagarna skulle ha fått se en ekoradioanläggning i verksamhet på en av flottans båtar, men tyvärr hade installationen ej hunnit bli färdig; i stället hade ingenjör Ajger anordnat en demonstration på Försvarets forskningsanstalt vid Signalregementet. Visningen ägde rum efter lunch i tre omgångar, kl. 13.30, kl. 14.30 och kl. 15.30, varvid deltagarna färdades i abonnerade bussar fram och åter. Demonstrationen omfattade en komplett, modern amerikansk ekoradioanläggning, avsedd för smärre fartyg, mikrovågmateriel och detaljer och enheter för ekoradioanläggningar, vidare en äldre, tysk apparat, avsedd för eldledning för luftvärn, samt en modern, frekvensmodulerad stridsvagnsstation av svensk konstruktion. Demonstrationen var synnerligen väl ordnad, intressant och gav rikt utbyte.

Före lunchrasten förekom en diskussion, inledd av undervisningsrådet C. E. Sjöstedt och rektor S. Åstrand, om

Problemen till handelsräkning i realexamen.

Undervisningsrådet Sjöstedt (referat): Den närmaste anledningen till att Skolöverstyrelsen upptog frågan, var en framställning från Sveriges köpmannaförbund den 25 januari 1945. Däri framhölls, att allmänheten ofta gör sig skyldig till den beklagliga missuppfattningen, att detaljistens bruttovinst också är hans verkliga vinst. I skolans matematikundervisning bör termen »vinst» endast användas i betydelsen »nettovinst». Köpmannaförbundet ville därför rekommendera den i modern handelsundervisning alltmer brukade termen »pålägg» i stället för termen »bruttovinst» vid sidan av begreppet »nettovinst». — Skolöverstyrelsen fann det rimligt att tillmötesgå detta önskemål från köpmannahåll och fastställde efter samråd med överstyrelsen för yrkesutbildning genom cirkulär den 8 februari 1945 [1] den nya terminologien i huvudsaklig överensstämmelse med köpmannaförbundets förslag. Därigenom vanns en fastare terminologi, som dessutom överensstämde med den i praktiken använda.

Termen »pålägg» är inte avsedd att helt ersätta termen »vinst». Pålägg är närmast ett begrepp från kalkylationen och kommer till användning vid vanlig affärsrörelse, där försäljningskostnaderna är betydande. I många problem som givits i realexamen, är det emellertid fråga om ren spekulationsvinst. I sådana fall vore det olämpligt att utbyta ordet vinst mot pålägg.

[1] Elementa, *28* (1945) s. 85.

Det nya inskränker sig till två nya *termer*: »fakturapris» och »pålägg». De motsvarande *begreppen* är däremot inte nya. Man har sedan gammalt haft behov av att särskilja »nettoinköpspris» och »bruttoinköpspris», »nettovinst» och »bruttovinst», liksom man använt och alltjämt använder »nettoförsäljningspris» och »bruttoförsäljningspris» vid rabatträkning. Fördelen med termerna fakturapris och pålägg ligger i att de anknyter till det praktiska livets terminologi på området. Problemen på handelsräkning i realskolan avser att ge en anknytning till praktiken, och termerna fakturapris och pålägg hör samman med en sådan orientering.

Den viktigaste fördelen med den nya terminologien är dock av pedagogisk art. Terminologien »fakturapris-inköpspris, vinst-pålägg» är i själva verket pedagogiskt enklare än terminologien »nettoinköpspris-bruttoinköpspris, nettovinst-bruttovinst». De förra termerna ha större pregnans, vilket är viktigare än de senares schematiska enkelhet. Man kan då också utbyta de längre och tyngre benämningarna »nettoförsäljningspris» och »bruttoförsäljningspris» mot de kortare »nettopris» och »bruttopris», och det är just i fråga om försäljningspris som skillnaden netto-brutto kommer till användning i praktiken.

Med den nya terminologien avsågs att vinna en pedagogisk fördel, en förenkling, och givetvis inte en skärpning av svårighetsgraden av ifrågavarande problem. Emellertid har en viss oro förmärkts bland matematiklärarna, vilket föranlett Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning att taga upp frågan till diskussion. Delvis torde denna oro bero på att det kommit till något nytt, och man vet inte vad detta nya kan föra med sig. Sedan nu några problem med den nya terminologien givits i realexamen och man sett vad man har att vänta, kanske oron snabbt nog kommer att minska. Talaren underströk — vilket han förut framhållit i Tidning för Sveriges läroverk[1] — att han såsom ansvarig för provräkningen i realexamen aldrig komme att ge några problem på handelsräkning, där terminologiska svårigheter kunde tänkas. De praktiska uppgifterna skulle göras så naturliga som möjligt.

Talaren ville i detta sammanhang uttryckligt betona, att de problem på handelsräkning med den nya terminologien som föreningen skickade ut till sina medlemmar i samband med ett cirkulär angående de nya bestämmelserna, var menade som en orientering för lärarna och inte avsedda som övningsexempel för eleverna. Problemens svårighetsgrad var nämligen vida större än vad som är lämpligt i en provräkning på realskolestadiet.

[1] Årg. 1945, nr 21.

Rektor Åstrand (referat): Realskolans matematikundervisning måste alltid ha ett dubbelt mål: dels skall den förbereda den kommande undervisningen i matematik på ett högre stadium, dels skall den ge de matematiska kunskaper och färdigheter — speciellt det sistnämnda — som den vanliga enkla medborgaren behöver i det praktiska livet.

Till det som endast eller åtminstone huvudsakligen har till uppgift att förbereda den kommande högre undervisningen räknar jag den syntetiska geometrien, algebran och ekvationsläran. Mot att realskolans kurs belastas med dylikt kan väl inte resas så starka invändningar, men man har naturligtvis både rätt och skyldighet att fordra, att detta stoff bjudes i en form som är smältbar för genomsnittseleven, så att realskolan icke göres svårare för dessa elever av hänsyn till dem, för vilka realskolan är en förberedelse till högre skolformer.

De svårigheter som dessa kursavsnitt erbjuder sammanhänger med att de sätter speciella krav på elevens abstraktionsförmåga. Han får lov att i viss utsträckning tänka matematiskt dvs. utan att ha ett konkret verklighetsunderlag för räkningarna. Enligt min mening borde arbetet på detta område inriktas mot ett relativt praktiskt mål, nämligen förståelsen av en formel. Däri ligger också en möjlighet att ge algebran ett mera konkret underlag och att åstadkomma ett samarbete mellan fysik och matematik — till båtnad för båda.

De praktiska kunskaper man begär av den som avlagt realexamen tycks mig först och främst vara räknefärdighet — dels på papperet, dels i huvudet — en viss förmåga att göra en överslagsräkning och en verklig förståelse för procentbegreppet. Jag vill särskilt stryka under att procenträkningen är en kardinalpunkt i realskolans undervisning. Det torde inte finnas något matematiskt begrepp, som förekommer i så stor utsträckning i alla människors dagliga liv som just procentbegreppet: från skatter och levnadskostnadsindex till rabatter, provisioner och räntor.

Inövningen av båda dessa grupper av kunskaper kräver att man förfogar över tillämpningsuppgifter av lämplig art. Och naturligtvis är därvidlag de tillämpningsuppgifter bäst, som har ett eget värde utöver det att vara tillämpningsuppgifter, jag menar alltså sådana uppgifter genom vilka eleverna lär sig något om vårt dagliga livs förhållanden eller om det samhälle i vilket de växer upp. Men man måste naturligtvis ställa den fordran på dessa uppgifter att de icke inför onödiga svårigheter för eleverna samt att de icke framställer de förhållanden som berörs, på ett felaktigt eller missvisande sätt.

Det sistnämnda har nu visat sig vara fallet med en del av de termer som sedan länge använts i skolmatematikens handelsräkning, alldeles särskilt då termen vinst.

Man kan komma ur denna svårighet på två olika sätt. Endera kan man se till att man får en riktig terminologi, eller också kan man avstå från det slag av uppgifter som det här är fråga om.

Skolöverstyrelsen har valt den förra utvägen. Genom de cirkulär som står i brännpunkten för denna diskussion, har alltså en terminologi angivits, som är ägnad att skapa klarhet på området utan att gå näringslivets berättigade intressen för nära. Svårigheten härvidlag ligger i att man blir tvungen att använda vissa i dagligt språk använda ord och precisera deras betydelse. Det innebär, att en elev som strävar med ett problem av denna art, inte kan falla tillbaka på sin egen erfarenhet av vad detta ord betyder, utan i stället får lov att försöka erinra sig den definition som han fått lära sig och som han är skyldig att komma ihåg, åtminstone tills dess han avlagt examen. Då det nu dessutom tycks förhålla sig så, att inom affärslivet termerna användes i något växlande betydelse, kan en tveksam pojke, som frågar en det praktiska livets man till råds, bli missledd av denne, så att han får fel, när han skall räkna realskoleuppgifterna. Inom min egen erfarenhet ligger t. ex., att uttrycket »fakturapris» vilket enligt cirkuläret icke bör innehålla transportkostnaderna, även användes i annan betydelse. Gång efter annan händer det nämligen att på vad vanliga enkla människor kallar räkningar, ordet faktura är tryckt som rubrik, men trots detta transportkostnader i form av porto eller bilfrakter är upptagna. Användningen av den fastlagda terminologien betyder därför, att ifrågavarande uppgifter i stället för att vara praktiska tillämpningsuppgifter blir uppgifter som fordrar inordnandet av det givna fallet under vissa inlärda regler, dvs. utmynnar i en rent abstrakt tankeprocess. Detta innebär en väsentlig försvåring för ett mycket stort antal av realskolans elever.

Det torde väl förhålla sig så, att de givna definitionerna är logiskt oantastliga. De har emellertid den olägenheten att vara svåra. Varför de är svåra för eleverna har ovan utretts. Varför de är svåra för lärarna vill jag inte försöka förklara. Att de gett upphov till en härva av misstag för massor av lärare torde emellertid vara ganska säkert. Naturligtvis kommer lärarnas svårigheter ganska snart att försvinna, när vi bara blir vana vid terminologien ifråga, men själva faktum att terminologien bereder rätt stora svårigheter i övergången, måste beaktas, och för ungdomen är ju i alla fall alltid terminologien ny.

Om det vore nödvändigt, dvs. om det vore en uppgift för realskolan att ge en elementär kunskap i handelsräkning, fick man väl finna sig i att ta denna försvåring av kursen. Enligt min mening bör den allmänna realskolan icke ge en dylik kunskap, och då har dessa handelsräkningstal ingen annan uppgift att fylla i realskolans kurs än att vara tillämpningsövningar. Under sådana omständigheter måste jag komma till den slutsatsen, att den andra utvägen som ovan omtalats, nämligen att helt avstå från exempel av denna typ, är den utväg som bör rekommenderas.

Om man inte helt vill undvika tillämpningsuppgifter från detta område, återstår ju dock möjligheten att vid formuleringen av uppgifterna vara så fullständig, att eleverna inte behöver vara i tvivelsmål om vad som menas. Som exempel vill jag anföra följande enkla exempel från realexamensskrivningen vt 1946.

»En köpman i Göteborg inköpte ett parti kaffe från New York till ett fakturapris av 50 cents per kg. Kostnaderna för frakt, tull m. m. uppgingo till 16 % av fakturapriset. Vilket försäljningspris åsatte köpmannen kaffet, då han beräknade 25 % pålägg? 1 dollar = 100 cents = 4,00 kr.»

Vad skulle man nu förlora på att formulera uppgiften på t. ex. följande sätt?

»En köpman i Göteborg inköpte ett parti kaffe från New York till ett pris av 50 cents per kg. Därtill kommo kostnader för frakt, tull m. m. uppgående till 16 % av nyssnämnda pris. När han skulle sälja partiet, åsatte han det ett pris som med 25 % översteg summan av hans egna utlägg. Vilket blev försäljningspriset? 1 dollar = 100 cents = 4,00 kr.»

Efter inledningsanförandena meddelade sekreteraren, att av de svar som ingått från medlemmarna på styrelsens rundfråga, huruvida medlemmarna gillade de nya bestämmelserna om nomenklatur, precis lika många svarat jakande som nekande. Efter några korta diskussionsinlägg uppsköts diskussionen till följande dag. När det sedan på onsdagen blev möjligt att åter taga upp frågan om nomenklaturen, beslöt mötet på grund av den långt framskridna tiden att avstå från fortsatt diskussion.

Visning av Tekniska läroverkets nya lokaler ägde rum på tisdagen samtidigt med demonstrationerna vid Forskningsanstalten. Det var meningen att rektor Nordhult i förväg skulle ha givit en kort orientering om läroverkets nybyggnad, men på grund av omkastningen i programmet valde rektor Nordhult att tala om de tekniska läroverkens organisation och arbetssätt. Då det kan vara

av värde för läroverkens lärare att känna till den utbildningsväg som de tekniska läroverken erbjuder, torde rektor Nordhult komma att publicera huvudpunkterna i sitt föredrag i ett kommande häfte av Elementa.

På tisdag kväll var gemensam middag anordnad på Byggnadsföreningens restaurang. Vid samkvämet efter middagen visades en film »Tunga don på revision». Filmen var en ersättning för ett planerat besök vid Statens järnvägars reparationsverkstäder, vilket ej kunde beredas plats i årsmötesprogrammet. Vidare förekom korta anföranden av dr Bruno Malmio och fru Malmio från Helsingfors, som var föreningens gäster under årsmötet. Dr Malmio talade om »Finlands matematik- och fysiklärarförbunds uppkomst och ändamål».[1]

Onsdagens program inleddes med det ovan nämnda föredraget av rektor Nordhult om de tekniska läroverkens organisation. Därefter talade föreningens finske gäst, dr Malmio, om

Fysik- och kemiundervisningen i de finska läroverken.

Talaren började med att ge en översikt över fysikens och kemiens ställning i den äldre skolorganisationen. Som totalomdöme kan sägas, att den var mycket blygsam, liksom även fallet var i Sveriges skolor. Genom 1914 års skolordning inrättades mellanskolor och 8-klassiga linjelyceer (en matematisk linje = vår reallinje, en klassisk linje = vår latinlinje, och en språklinje). Av de 8 åren vid lyceet torde 5 motsvara realskolestadiet och 3 gymnasiestadiet. År 1919 inrättades 6-klassiga lyceer, som bygger på avslutad folkskola, i avsikt att pröva folkskolans lämplighet som bottenskola. Den nu gällande skolordningen daterar sig från år 1941. Först i 1914 års skolordning blev kemien officiellt ett obligatoriskt ämne på linjelyceernas timplan, dock endast på mellanskolestadiet. I klass IV erhöll fysiken 3 timmar, anslagna åt en experimentell grundkurs i fysik + de viktigaste astronomiska företeelserna. Kemien erhöll 2 timmar i klass V, och på denna tid skulle genomgås en experimentell grundkurs i kemi + en kompletterande kurs i elektricitetslära. År 1918 höjdes kemiens timtal med 1 veckotimme. I 1941 års skolordning har både kemiens och fysikens ställning förbättrats betydligt. På linjelyceernas matematiska linje har kemien sålunda 4 timmar på mellanskolestadiet och 2 timmar på gymnasiestadiet, fysiken 4 timmar i mellan-

[1] En artikel härom författad av lektor R. Westlin, Helsingfors, återfinnes i Elementa, *24* (1941), s. 148. (Red.)

skolan och 7 timmar på gymnasiet. På språklinjen har både fysiken och kemien vardera 4 timmar men endast på mellanskolestadiet (undervisningen är där gemensam för den matematiska och den språkliga linjen). I de klassiska lyceerna har man 2 timmar kemi i klass V (mellanskolestadiet) och 6 timmar fysik på gymnasiestadiet. Synbarligen har både fysiken och kemien vida bättre ställning i de svenska skolorna. Elevlaborationer förekommer endast på mellanskolestadiet, och därvid får klassen delas under 1 timme, så framt antalet elever överstiger 20.

Särskilda laboratorier för fysik och kemi finns endast i moderna skolhus. De flesta skolor är försedda med elektricitet och vatten, men gas finns endast i Helsingfors och Åbo. Före kriget fanns goda möjligheter att skaffa fysikapparater och kemiutensilier, dels genom den inhemska firman Physica, dels från svenska och tyska firmor. Under kriget upphörde Physica att tillverka skolapparater, och valutaförhållandena omöjliggör anskaffning av materiel utifrån. Flera stora skolhus har svårt skadats vid bombangrepp, och laboratorierna med apparater och inventarier har delvis förstörts. Det råder stor brist på kemiska utensilier, både glas och kemikalier, varför det är mycket svårt att upprätthålla undervisningen i fysik och kemi i den utsträckning och på det sätt som är avsett och önskvärt.

För att avhjälpa den rådande bristen på apparater har man planerat att låta eleverna i statens tekniska fackskolor förfärdiga enkla skolapparater, i främsta rummet för dessa skolors eget behov men även för folkskolorna och lyceerna.

Bristen på läroböcker i fysik och kemi har nyligen kunnat hävas genom utgivandet av dels en modern lärobok i fysik av Kallio-Kuuskoski, dels en lärobok i kemi av Heinänen, båda på finska språket. Den senare är avsedd för gymnasiekursen i kemi i klasserna VII och VIII, som under läsåret 1946—47 förekommer för första gången. För att ge lärarna tillfälle att ta del av den moderna fysikens och kemiens landvinningar — detta är ju aktuellt med den starkt förbättrade ställning som de nämnda ämnena fick i 1941 års skolordning — planerar Finlands matematik- och fysiklärarförbund att från och med i år anordna kursdagar i dessa ämnen. Anslutningen väntas bli stor.

En annan framtidsplan av betydelse är frågan om standardisering av de matematiska och fysikaliska storheternas nomenklatur. En viss svårighet föreligger däri, att det finska språket endast har ett ord, paino, för att beteckna tyngd och vikt. Det blir alltså nödvändigt att nyskapa ett ord för tyngd, om paino i fortsättningen skall betyda vikt (massa).

Talarens slutomdöme var, att man i Finland ännu har många svårigheter att övervinna vid höjandet av undervisningen i fysik och kemi, så att den motsvarar moderna krav. Men han hoppades, att den nya skolordningen skulle underlätta arbetet att nå målet. Detta arbete är dock endast en ringa bråkdel av det väldiga återuppbyggnadsarbete som förestår efter kriget.

Den kanske viktigaste punkten på årsmötets program var en diskussion om

Lärarutbildningen i matematik, fysik och kemi.

Styrelsen hade av 1946 års skolkommission anmodats att besvara tre av kommissionen uppställda frågor och därutöver anföra de synpunkter som styrelsen fann påkallade. Vid sammanträde den 6 december 1946 tillsatte styrelsen efter en livlig principdebatt tre delegationer, en för vartdera ämnet matematik, fysik och kemi, som fick i uppdrag att utarbeta förslag till svar å de uppställda frågorna. Delegationen för matematik utgjordes av adjunkt Göran Beskow, förste aktuarie Stig Comét och rektor Gustaf Mikaelsson samt (utom styrelsen) rektor Erik Martens. Fysikdelegationen utgjordes av lektor Elis Hjalmar, rektor Lilly Tengnér, lektor Gösta Funke samt (utom styrelsen) lektor Ernst Knave och adjunkt Nils Larsson. Delegationen för kemi bestod av lektor Bror Gustaver, lektor Ejnar Nordefeldt, fil. lic. Iwan Bolin samt (utom styrelsen) adjunkterna Valter Ekman och Bernhard Elmgren. Styrelsen beslöt vidare, att föreningen skulle diskutera frågan vid årsmötet med utgångspunkt från de nämnda förslagen.

I diskussionen vid årsmötet yttrade sig lektor Börje Svensson, adjunkt Fylking, lektor Leide, lektor Knave, adjunkt Wettervik, fil. lic. Dyfwerman, undervisningsrådet Lundblad och lektor Englund. Av de synpunkter som därvid framkom, må nämnas krav på en revision av fordringarna i fil. ämbetsexamen samt att dessa fordringar borde göras enhetliga för samtliga rikets universitet och högskolor. Vidare framhölls behovet av statsunderstödda fortbildningskurser för lärare i ämnena fysik och kemi. Att den onormalt långa studietiden för erhållande av ämbetsexamen borde nedskäras till vad som från början var avsett, i genomsnitt $3\,^1/_2$ år, var samtliga talare ense om. Däremot gick meningarna isär om *hur* detta mål skulle uppnås. Från olika håll framhölls, att det med tanke på det under de kommande åren oerhört stegrade behovet av lärare var nödvändigt att inrätta en lärarexamen med till ca 3 år begränsad studietid, som gav kompetens för undervisning å realskolestadiet. För kompetens att undervisa på gymnasie-

stadiet skulle krävas något fördjupade studier. Från andra håll framhölls med skärpa, att man inte önskade någon uppdelning av läroverkslärarkåren i två kategorier, lärare för realskolan och lärare för gymnasiet. Särskilt från fysiklärarhåll betonade man, att det fordras samma utbildning för undervisning i realskolan som å gymnasiet.

Vid sammanträde den 14 jan. diskuterade styrelsen de framkomna synpunkterna. Styrelsens svar till skolkommissionen utarbetades av arbetsutskottet vid sammanträde den 16 jan. Denna skrivelse och en till densamma fogad reservation av sekreteraren jämte yttrandena av de ovan nämnda delegationerna för matematik, fysik och kemi är intagna i ett utförligt meddelande, vilket utsänts till föreningens medlemmar.

Som sista punkt på årsmötesprogrammet demonstrerade chefen för Norstedt & Söners verkstadsavdelning, Stig Lindholm, nyare fysikaliska apparater.

Bror Gustaver.

Styrelseberättelse för år 1946.

Styrelsen har under året bestått av 21 personer, varav följande fem även tillhört arbetsutskottet: rektor T. Wetterblad, ordf., lektor A. Uhler, v. ordf., lektor B. Gustaver, sekr. och skattmästare, lektor G. Funke och adjunkt G. Beskow. Övriga medlemmar av styrelsen ha varit: fil. lic. I. Bolin, Stockholm, förste aktuarie S. Cométt, Stockholm, lektor A. Guntsch, Umeå, lektor E. Hjalmar, Stockholm, lektor F. Kiessling, Göteborg, fil. mag. Ingrid Lindstedt, Stockholm, lektor C. Lönnqvist, Södertälje, lektor E. Nordefeldt, Stockholm, rektor G. Mikaelsson, Stockholm, rektor A. Nordhult, Stockholm, rektor P. G. Persson, Malmö, adjunkt E. Sandén, Stockholm, lektor B. Svensson, Jönköping, rektor M. Söderman, Luleå, rektor Lilly Tengnér, Stockholm, rektor S. Åstrand, Stockholm.

Föreningens ordinarie årsmöte hölls torsdagen den 3 januari 1946 å Medborgarhuset i Stockholm i samband med 28:e svenska läroverkslärarmötet den 2—5 januari 1946. Referat från årsmötet (Elementa *29*: 1, 1946) samt referat från sektionsförhandlingarna i sektionen för matematik, fysik och kemi vid läroverkslärarmötet (särtryck ur mötesberättelsen) ha tillsänts föreningens medlemmar.

Styrelsen har under året haft 5 och arbetsutskottet 2 sammanträden. Bland ärenden som behandlats, må nämnas: utsändandet av PM angående rättandet av studentskrivningarna i matematik och fysik å gymnasiet samt provräkningen i realexamen, skrivelse

från 1945 års lärobokskommitté och skrivelse från Skolkommissionen angående lärarutbildningen.

Föreningen hade vid årsskiftet 1946—47 587 medlemmar.

Stockholm den 31 december 1946.

Torsten Wetterblad
Ordförande

Bror Gustaver
Sekreterare

Bokanmälningar.

Harald Cramér, *Mathematical Methods of Statistics.* Gebers, Uppsala 1945, 575 s., kr. 45:—.

Den matematiska statistiken är sedan några decennier stadd i en mycket snabb utveckling. Från att ha varit en hasardspelsteori för exklusiva teoretiker har den blivit ett förnämligt hjälpmedel på de mest skilda områden, inom biologi, ekonomi, teknik, psykologi osv. Konfrontationen med det praktiska livet har gett upphov till nya problemkomplex och inbjudit till nya teoretiska landvinningar. Resultaten ha publicerats i en mängd uppsatser och i en brokig samling böcker, i vilka teorien ofta är en bisak och tillämpningarna på något specialområde huvudsaken, och i vilka matematikern sätts på svältkost, för att majoriteten av läsarna inte skall finna dieten för kraftig. — Samtidigt som denna expansion försiggått, har mer obemärkt teorien fördjupats och fundamenten förstärkts.

I professor Cramérs stora lärobok ha både expansionen och fördjupningen beaktats. Denna bok ger för första gången en brett upplagd framställning av den matematiska statistiken, byggd på en stabil matematisk grundval, varför både ämnets karaktär av självständig matematisk disciplin och dess möjligheter att tjäna andra vetenskaper starkt framhävts.

Det är ofrånkomligt, att en bok av detta slag kräver matematisk insikt hos läsaren. Detta gäller i huvudsak differential- och integralkalkyl samt serier. Härutöver erforderliga matematiska hjälpmedel behandlas i bokens första del. Sålunda införs läsaren i den för sannolikhetskalkylens moderna uppläggning mycket användbara teorien för Lebesgue-integraler. Vidare studeras bl. a. matriser, kvadratiska former och vissa Fourier-integraler. Detta värdefulla avsnitt gör läsaren i stort sett oberoende av matematisk speciallitteratur.

Läsningen av andra delen med dess systematiskt upplagda framställning av statistiska variabler och deras fördelningsfunktioner bereder den matematiskt intresserade en på detta område sällan känd njutning. Detta beror icke minst på den elegans i bevisföringen, som det konsekventa användandet av karakteristiska funktioner medför, särskilt för behandlingen av variabler i flera dimensioner. Ett antal exempel givas, många av ganska hög svårighetsgrad.

I tredje delen tillämpas teorien på en mångfald praktiska problem. Den som studerat ämnet med hjälp av föreläsningsanteckningar och mer eller mindre lämplig speciallitteratur kanske bäst förstår att uppskatta den översiktliga moderna behandlingen av hithörande frågor. Detta gäller i synnerhet härledningen av sampling-fördelningarna och studiet av deras numera så betydelsefulla tillämpningar. Han noterar också med tillfredsställelse, att förf. presenterar åtskilliga nya resultat och stränga bevis för flera förut lättvindigt avfärdade spörsmål. Medelfelsberäkningarna, som i äldre litteratur dominerade och fortfarande missbrukas på sina håll, ha här som sig bör fått en undanskymd och noga avgränsad plats. Vidare behandlas bl. a. regressionsteori, variansanalys och olika estimationsmetoder, illustrerade av ett antal genomräknade exempel, som emellertid av utrymmesskäl icke äro så talrika, som den praktiskt arbetande statistikern skulle önska. Genom sistnämnda område går f. n. en markerad frontlinje, och läsaren får en aktuell rapport om det nuvarande läget.

Framställningen är föredömligt klar och hänvisningarna inom boken och till litteraturen överflödande, vilket gör den mycket lämplig även som uppslagsbok. Den typografiska utstyrseln och uppställningen äro utmärkta, och korrekturläsningen har gjorts med skrupulös noggrannhet.

Man får sålunda i detta standardverk en samlad bild av den matematiska statistikens nuvarande läge. Utan elementära förkunskaper i ämnet bör man kanske inte ge sig i kast med detsamma, ty dess bredd och rikedom på detaljer kunna möjligen bereda svårigheter för den, som inte förut har huvudlinjerna klara för sig. Däremot kan delar av den mycket väl läsas av den stora skara, som hellre vill skörda frukterna av analysen än att själv utföra den, även om man måste varna dessa för att göra den till en kokbok i statistik. Den är en guldgruva för teoretiker, men den är samtidigt av utomordentligt stort värde för den del av det praktiska livets folk, som vill fördjupa sin syn på de statistiska företeelserna och få nya uppslag för sitt arbete.

Gunnar Blom.

Niels Bohr, *Quantum d'action et noyaux atomiques*, Actualités scientifiques et industrielles Nr. 807, Hermann & Cie, Paris 1939, 28 sid., 25 fr.

G. Ribaud, *Constantes thermodynamiques des gaz aux températures élevées*, Actualités scientifiques Nr. 946, Paris 1943, 50 sid., 30 fr.

Bohrs artikel, nu redan ganska gammal men i nästan allt fortfarande aktuell, är en fransk version av en artikel publicerad ett år tidigare i Annalen der Physik som hyllning åt Max Planck till dennes 80-årsdag. En dansk version återfinnes i Fysisk Tidsskrift 1938. Efter en kortare inledning över kärnfysikens och kvantteoriens utveckling ger författaren en översikt av den statistiska teorien för atomkärnornas byggnad, droppmodellen samt teorien för kärnreaktioner. Arbetet är väl avsett för en ganska bred publik — inga formler — men är fördenskull ingalunda lättläst. Som så ofta då det gäller Bohrs arbeten får man läsa varje mening ett par gånger för att få största möjliga behållning.

Det andra häftet innehåller en kort översikt av termodynamiken, ungefärligen motsvarande magisterkursen, jämte tillämpningar på gaser vid höga temperaturer. Diskussion av de reella gasernas avvikelser från van der Waals och Berthelots tillståndsekvationer. Experimentella metoder för bestämning av gasers specifika värme. *N. Svartholm.*

J. M. Hyslop, *Infinite Series*. Oliver and Boyd, 2nd ed. Edinburgh 1945. Pp. 118, 5 s.

Denna lilla bok är i motsats till flera andra i serien »University Mathematical Texts» ganska fyllig i framställningen. Den innehåller ifråga om oändliga serier och produkter allt vad som ingår i kursen för två betyg i ämbetsexamen och något därutöver. En mängd klassiska exempel äro inarbetade i texten, och dessutom finnas ca 100 övningsexempel med svar. *Sven Hilding.*

Alexander Wood, *The Cavendish Laboratory*. Cambridge University Press 1946. Pp. 59, 8 planscher, 2 s. 6 d.

Förf. uppger, att William Thomson år 1846 övertog en gammal vinkällare i Glasgow och där inredde ett rum, som kallades »a physical laboratory, the first of its kind in this country». Det är förvånande att något egentligt fysiskt laboratorium icke tidigare funnits i Newtons hemland, där dock den gamle Henry Cavendish på 1700-talet i all tysthet gjort många fundamentala experiment.

Genom inrättandet av Cavendish-laboratoriet (vartill medel donerades av 7:e hertigen av Devonshire, i släkt med Henry Cavendish)

och med Maxwell som förste chef tog emellertid England snabbt igen vad som försummats, och sedan länge har Cavendish-laboratoriet i Cambridge med rätta betraktats som världens mest berömda fysiska laboratorium. Vi behöva blott erinra om namnen på några av de många forskare, som arbetat där: Lord Rayleigh, Glazebrook, J. J. Thomson, Rutherford, Townsend, Mc Clelland, Aston, C. T. R. Wilson, O. W. Richardson, Cockcroft, Walton, C. D. Ellis, Chadwick, Oliphant, Kapitza, L. Bragg.

Boken refererar i korthet laboratoriets utveckling, sedan det öppnades (1874) fram till våra dagar. Man får även inblick i arbetet där och en uppfattning om hur många fundamentala problem, som behandlats, såväl av landets egna forskare som av utländska gäster från alla håll.

Den lilla skriften utgör trots sitt ringa omfång ett vackert dokument till heder för gedigen engelsk vetenskap, fri och öppen inför hela världen. *J. Tandberg.*

A. W. Porter, *The Method of Dimensions.* Methuen's Monographs on Physical Subjects, London 1946, 3 ed. Pp. 78, 4 s.

I den lilla boken sammanföras en rad exempel på hur man t. ex. vid mekaniska problem kan utgå från tre fundamentala dimensioner och härleda lagar och formler, som eljest kräva en mera utförlig behandling. Det må gälla problem rörande pendeln, ytspänning, strömning, planetrörelse eller friktion. När man tänker i dimensioner, brukar ju temperaturen vålla en del besvärligheter, men även dessa utredas och bemästras. Inom elektricitet och magnetism ha ju enheternas dimensioner sedan länge varit föremål för allmänt beaktande, varför de här endast behandlas summariskt. Boken är »tankeväckande» för en experimentalfysiker.

J. Tandberg.

J. Barton Hoag, *Electron and Nuclear Physics.* Second Edition of Electron Physics. Pp. 502. D. Van Nostrand Company, New York, 1938. Reprinted 1945. Pris kr. 20:—.

Ändamålet med denna bok är att presentera det experimentella underlaget för elektron- och kärnfysiken. I varje kapitel ger författaren först en beskrivning av grundläggande experimentella fakta och diskuterar de slutsatser, som kunna dragas ur dessa. Författaren för sedan läsaren in i laboratoriet och ger honom en detaljerad beskrivning över hur han själv skall kunna upprepa några av dessa experiment.

Boken har tre huvudavdelningar: elektronfysik, kärnfysik och laboratorieteknik.

I de första kapitlen behandlas elektronen, dess laddning, massa, våglängd samt emission från varma och kalla ytor. Dessa följas av kapitel, vilka behandla fenomen, som äro kännetecknande för de yttre delarna av atomen.

I den andra huvudavdelningen diskuteras atomkärnor, positiva strålar, α-, β- och γ-strålar, naturlig och konstgjord radioaktivitet, jonacceleration, kärnomvandlingar, positroner, neutroner samt kosmiska strålar.

I den sista avdelningen lämnar författaren många värdefulla råd om vakuumteknik, mätning av små strömmar, påvisande och uppmätning av laddade och oladdade partiklar samt högspänningsteknik. Många av de experimentella detaljer, som författaren beskriver äro sådana, som man vanligtvis inte finner i litteraturen, men som torde vara av mycket stort värde för den, som för första gången utför försöken.

I slutet av boken finnas ett hundratal räkneexempel samt 16 tabeller. *Yngve Axner.*

Walter Clark, *Photography by Infrared.* John Wiley & Sons, Inc., New York 1946. Second edition. 472 sid., 93 ill., $ 6.00.

Clarks ovannämnda bok utgör den mest omfattande och betydelsefulla monografien från infrarödfotografiens område. Första upplagan utkom 1939 och hade då tryckts i London. Klichéer och övrigt material förstördes emellertid under en av krigets bombraider mot den brittiska huvudstaden, varför den nya upplagan måste sättas upp från början; detta har skett i Amerika. På grund härav verkar boken till det yttre som ett helt nytt arbete av annat format och med annan papperstyp; planläggningen är däremot helt oförändrad, och detsamma gäller långa stycken av texten. Givetvis har dock i denna hänsyn tagits till utvecklingen under mellantiden och smärre ändringar möter man här och var. Helt nytillkommet är ett kapitel om upptäckande av camouflage genom infrarödfotografering, likaså har ett avsnitt om skogsundersökningar från luften tillkommit, medan ytterligare några avsnitt blivit underkastade en genomgripande revision. Avlägsnat är ett relativt kort kapitel om mätning av infraröd strålning på fotografisk väg, vars huvudsakliga innehåll i stället inarbetats i ett annat kapitel.

Redan första upplagan innehöll vid slutet av varje kapitel utförliga litteraturförteckningar och dessa ha kompletterats med angivelser över nytillkomna undersökningar. Dessa litteraturförteckningar, som ofta upptaga över hundratalet uppgifter per kapitel, äro särdeles värdefulla och måste betraktas som nästan

fullständiga; det har dock givetvis icke helt kunnat undvikas att ett eller annat europeiskt arbete från krigsåren gått författaren förbi. I detta sammanhang kan det även nämnas, att uppgifter om europeiska infrarödkänsliga filmsorter (t. ex. Agfas) avlägsnats ur den nya upplagans text, säkerligen beroende därpå att sådana ej längre saluföras.

En kort uppräkning av innehållet i de skilda kapitlen kan måhända ha sitt värde för presumtiva köpare av boken, varför jag här skall lämna en sådan.

Kap. 1 utgör en introduktion, som bl. a. redogör för upptäckten av de infraröda strålarne genom W. Herschel 1800. Nästa kapitel ger en översikt över infrarödfotografiens praxis, varefter kap. III behandlar mörkrumsarbetet. Kap. IV behandlar det fotografiska materialets egenskaper i allmänhet och ger en kort men nyttig orientering rörande en hel del fotografiska grundfrågor, t. ex. om svärtningskurvor, egenkänslighet, färgkänslighet, kontrast, reciprocitetsavvikelser, kornighet m. m. Kap. V diskuterar sensibiliseringen för infrarött och lämnar därvid både historiska och praktiska upplysningar. Kap. VI omnämner användningen av Herscheleffekt ävensom andra indirekta metoder för infrarödfotografering. I kap. VII behandlas ljuskällornas infrarödhalt, i kap. VIII infrarödfotografiens förmåga att differentiera mellan olika material samt användningar härav inom textilindustri, grafisk industri, dokumentär fotografi och kriminalogi. Kap. IX har helt ägnats de många intressanta användningarna från det medicinska området, medan kapitlet därpå rör sig inom botanikens och paleontologiens domäner. Kap. XI ägnas åt mikrofotografi med användning av infraröd strålning, varefter en stor mängd olika användningsområden samlats i kap. XII, många av dessa mycket lockande. Kap. XIII gäller upptäckandet av camouflage genom infrarödfotografering och kap. XIV—XV infrarödstrålningens förmåga att genomtränga stora atmosfärskikt, särskilt vid dis och dimma. Här har ju infrarödfotografien firat särskilda triumfer och väckt många förhoppningar. Kap. XVI slutligen diskuterar olika materials optiska egenskaper inom det infraröda området. Därefter avslutas boken med en rad tabeller och recept.

Som torde framgå av denna uppräkning är det ett synnerligen omfattande material, som bjudes i denna bok; framställningen står också på höjden ifråga om vederhäftighet. Boken är mycket lättläst.

Helmer Bäckström.

D. W. Wilson, A. O. C. Nier, S. P. Reimann, *Preparation and Measurement of Isotopic Tracers.* A Symposium Prepared for The Isotope Research Group. J. W. Edwards, Ann Arbor, Michigan, 1946. 108 s., kr. 9:50.

Ifrågavarande arbete omfattar 8 uppsatser av skilda författare. Det avser att vara ett kompendium för biologer och kemister, som arbeta med stabila och radioaktiva isotoper. De isotoper, som avhandlas äro alltså sådana, som äro av särskilt intresse inom biologi och biokemi.

Den första uppsatsen (av H. G. Thode och A. F. Reid) handlar om separation av stabila isotoper med kemiska metoder. Metoder för koncentrering av O^{18}, C^{13}, N^{15}, S^{34} och S^{36} beskrivas. O^{18} koncentreras genom destillation av vatten, de övriga genom utbytesreaktioner. Författarna påpeka, att utbytesreaktioner äro mycket lämpliga för koncentrering av isotoper med masstal upp till 40, medan för tyngre isotoper den procentuella masskillnaden blir för liten för att ett gott utbyte skall erhållas.

A. O. Nier beskriver en masspektrografs konstruktion och användning för bestämning av isotopers relativa mängdförhållande samt diskuterar isotopanalys av N, C, O och H.

D. Rittenberg redogör för metoder att framställa gasformiga föreningar av ämnen, som skola isotopanalyseras i masspektrograf. Analys av kväve göres på elementet självt. Organiska föreningars kväve överföres först i ammoniak, som sedan oxideras till fritt kväve. Kol analyseras enklast i form av koldioxid. Metoder att helt eller delvis överföra kolet i organiska föreningar till koldioxid beskrivas.

S. Weinhouse beskriver hur man framställer koldioxidprov för analys i den av Consolidated Engineering Corporation of Pasadena tillverkade masspektrografen.

M. Cohn skriver om bestämning av deuterium med en falldroppsmetod. Denna går ut på att bestämma en vattendroppes täthet genom mätning av falltiden i ett rör innehållande fluortoluol. Ur tätheten beräknas sedan droppens halt av deuterium.

C. Anfinsen redogör för en annan droppmetod för bestämning av deuteriumhalt. Tätheten hos en vattendroppe bestämmes i detta fall genom observation av dess läge i förhållande till droppar av känd täthet i ett rör innehållande brombensol och fotogen, som blandats, så att en lineär täthetsgradient erhållits.

Framställning av radioaktiva isotoper av H, C och S behandlas av M. D. Kamen. Författaren ger först några synpunkter på kärnreaktioner i allmänhet samt redogör i korthet för bestrålningstekniken vid framställning av radioaktiva isotoper. Därefter

diskuteras de kärnreaktioner, som kunna ge de radioaktiva isotoperna H^3, C^{11}, C^{14} och S^{35}.

Den sista uppsatsen är skriven av A. F. Reid och behandlar den mätteknik, som kommer till användning vid arbeten med radioaktiva isotoper. Det är ju i allmänhet elektron- och γ-strålare, som användas vid »tracer»-arbeten, och det blir därför framför allt Geiger-Müller-röret, som kommer till användning. Författaren behandlar tämligen detaljerat, hur mätningar med Geiger-Müller-rör skola utföras under olika förutsättningar med avseende på strålningens art och energi, den tillgängliga mängden aktivt material o. s. v. De korrektioner som måste tillföras mätresultaten genomgås systematiskt och framställningen illustreras med sifferexempel.

Samtliga uppsatser äro inriktade på den praktiskt-experimentella metodiken, medan allmänna teoretiska överläggningar helt saknas. Som nämnts har föreliggande arbete kompendiekaraktär (det föreligger i rotaprinttryck). Trots detta ger det en lättläst, klar och koncis framställning av metoder, som användas i samband med »tracer»-arbeten. — *Lars Carlbom.*

Louis de Broglie m. fl., *Le Méson, Aspects théoriques et expérimentaux.* Edition de la Revue d'Optique théorique et instrumentale, Paris 1945. 192 s. med XVI pl. och 21 fig. i texten. Pris häftad kr. 8: 55.

Under presidium av Louis de Broglie har i maj 1944 avhållits en rad möten av franska fysiker, varvid förekommo föredrag och diskussioner, alla med den elementarpartikel till föremål, som här i landet vanligen kallas mesotron, men av föredragshållarna i fråga antingen meson eller mesoton, allt eftersom man vill betona dess karaktär av rent teoretisk nyskapelse (meson) eller vill framhålla dess experimentellt ådagalagda existens (mesoton). I det angivna arbetet ingå dels ett öppningsanförande av L. de Broglie, dels de föredrag som hållits, vart och ett följt av ett fullständigt diskussionsprotokoll.

Mesonen är en partikel, som 1935 av japanen Yukawa infördes i atomfysiken som ett medel att förklara de sammanhållande krafterna i atomkärnan. Dess massa beräknades vara cirka 200 gånger elektronens eller $^1/_9$ av protonens, laddningen kan vara såväl positiv som negativ med det numeriska värdet 1. Denna rent spekulativa nyskapelses existens har sedermera på ett förvånande sätt bekräftats, då man i den kosmiska strålningen upptäckte en speciell partikel, vars massa tycktes vara av den för mesonen förutsedda storleksordningen.

Det är sålunda 10 års forskning, som man — delvis med den franska forskningens fleråriga isolering som incitament — velat sammanfatta och diskutera vid dessa möten. Följande föredrag ha därvid hållits: Louis Leprince-Ringuet om »Le Méson expérimental», Mme Marie-Antoinette Tonnelat om »Schéma de l'évolution de la théorie du méson», Robert Richard-Foy om »La masse du méson», André Fréon om »Données expérimentales sur la vie moyenne du méson», Serge Gorodetzky om »Spin et charge du méson du point de vue expérimental», Jean-Louis Destouches om »Méson et théorie des forces nucléaires» och till sist Jean Daudin om »Phénomènes nucléaires liés au mésoton expérimental». Till varje föredrag är fogad en förteckning över litteraturen på området.

Man torde kunna säga, att allt, som var bekant om mesotonen vid tiden för dessa möten, återfinnes i arbetet; ett standardverk för kännedomen om denna elementarpartikel. Ett par kapitel, t. ex. Mme Tonnelat's äro något svårsmälta för en kemist, men beträffande de övriga får rec. bekänna, att han inte på senare tid har läst något, som berett honom större nöje och givit mera behållning än dessa föredrag. De åtföljas av ett stort antal utsökt vackra Wilsonbilder av skurar (på franska »kärvar» eller »kvastar», vilket förefaller lyckligare), materialisationer och deras motsatser samt mesotonspår. *G. Starck.*

Kosmos, Fysiska uppsatser, utgivna av Svenska Fysikersamfundet, bd 24, 1946, 176 s. I bokhandeln häft. 10 kr. Medlemskap, årsavgift 10 kr., medför rätt till bundet ex. Anmälan till fil. dr Anna Beckman, Lilljeborgsvägen 3, Uppsala.

Det 24:e bandet av Kosmos inledes med en minnesteckning över framlidne prof. C. W. Oseen, i vilken prof. Hogner ger en karakteristik av denne forskares vetenskapliga gärning. Dr Anna Beckman skildrar i tvenne uppsatser i korthet nobelpristagarnas W. Pauli och O. Hahn prisbelönade arbeten. I övrigt är detta band helt ägnat åt kärnfysikaliska problem eller problem, som i anledning av kärnfysikens utveckling blivit aktuella. I spetsen står en uppsats av prof. Bohr över atomkärnornas omvandlingar, utgörande ett avtryck av en artikel i Fysisk Tidsskrift 1941. Denna innehållsrika uppsats, som i lättillgänglig form berör ett flertal djupt liggande frågor rörande kärnornas egenskaper, har trots sin för en kärnfysikalisk framställning avsevärda ålder en påfallande aktualitet. I en grupp på tre uppsatser behandlas i samband med energiutvinningen ur uran stående problem. Först skildrar prof. J. Tandberg i en tyvärr alltför kort uppsats de transurana elemen-

tens uppkomst och framställningshistoria. Docent L. G. Sillén beskriver urans kemi, som genom den med ens kraftigt ökade efterfrågan på uran fått stark aktualitet, och slutligen ger geolog J. Eklund en intressant översikt över världens energitillgångar, vari framhålles den betydelse uran kan tänkas få såsom ersättning för de snart sinande energikällor, som oljan, vattenfallen och det lättåtkomligare kolet utgöra. Framställningen bjuder på många beaktansvärda synpunkter på energiproblemet. I en uppsats om aktiva isotoper anger docent K. Siegbahn metoder för studium av β- och γ-strålning från sådana och hur man genom analys av denna strålning kan bestämma energinivåer hos kärnorna. Två β-spektrografer för detta ändamål tillverkade vid Forskningsinstitutet i Freskati beskrivas. En del av författarens egna resultat angivas även. Betatronen är föremål för en uppsats av civilingenjör O. Wernholm, vari dess teori och utvecklingshistoria skildras. Bandet innehåller även en teoretisk uppsats av docent N. Svartholm. I denna söker författaren utreda det kvantummekaniska begreppet utbyteskraft och ger en utomordentligt enkel framställning av hur detta begrepp tvungits fram och hur man sökt påvisa existensen av krafter av denna art. Slutligen ger dr R. F. Öhnell en översiktsartikel om kärnfysikens användning inom biologien och medicinen, i synnerhet användningen av radioaktiva indikatorer för studium av en mångfald fysiologiska problem. Framställningen ger ett levande intryck av den överväldigande mängden av frågor, som genom dessa nya metoders tillkomst kunnat bringas inom forskningens sfär. *Nils Ryde.*

Owe Berg, *Engelska och amerikanska mätinstrument.* Föredrag hållna våren 1946 i Ingenjörsvetenskapsakademien och Svenska Teknologföreningen. Utg. av Ingenjörsvetenskapsakademien. Karlskoga 1946. 126 s., kr. 15:—.

För omkring femton år sedan var exempelvis en spektrograf ett huvudsakligen vetenskapligt instrument, medan den numera användes i det dagliga arbetet vid de flesta större järn- och metallindustrier. Industrien är nu vetenskapen tätt i hälarna inom många områden, och denna utveckling gör sig även tydligt märkbar i den beskrivning av vetenskapliga och tekniska mätmetoder och instrument, som sammanställts i ovan angivna arbete. Särskilt intresse har härvid ägnats följande specialiteter: spektrografer, apparater för fysikalisk-kemisk analys, apparater för materialprovning, oscillografer och givare samt regulatorer och skrivare.

Spektrografer användas inom många industrier såsom ersättning för och komplement till kemiska analysmetoder. Här ges nu

en beskrivning av metodiken och olika typer av spektrografer med tillhörande hjälpinstrument, såsom ljuskällor, fotoceller och spektrallinjefotometrar. I kapitlet om fysikalisk-kemisk analys behandlas apparater för mätning av absorption och reflexion, kolorimetrar och fluorimetrar samt vidare ph-metrar, polarografer, titreringsapparater, masspektrografer och röntgenapparatur för strukturundersökningar. Bland materialprovningsapparater finner man instrument för spricksökning, mätning av tjocklek hos skikt och hållfasthetsprov.

Primärmaterialet till boken har förf. samlat under en nyligen företagen resa till England och Amerika. Förf. har tydligen gjort sig stor möda att placera de olika instrumenten i följdriktigt sammanhang och har även givit utförliga metodiska anvisningar i den mån detta varit möjligt i en så koncentrerad framställning. Texten kompletteras med ett stort antal fotografier och principritningar. *B. Grundström.*

Kurs i kärnfysik. Teknisk Tidskrifts förlag. Stockholm 1947, 112 s., kr. 12: —.

Under tiden 10—13 april 1946 hölls i Stockholm en flitigt besökt föreläsningskurs i kärnfysik. Av de 16 föreläsarna voro några från Danmark och Norge. Föredragen ha, ev. efter någon bearbetning, sammanförts till ett vackert kompendium, som omfattar bl. a.: en teoretisk inledning (utan matematiska formler) av prof. O. Klein, en uppsats om isotopi och massdefekt av vår skicklige masspektroskopist i Uppsala, C. Reuterswärd, vidare om isotopseparation av prof. Hulthén, om kärnmoment av doc. von Friesen, om radioaktiva strålningens absorption av norrmannen Njål Hole och om excitationsenergier av dennes landsman Roald Tangen. Den danske fysikern Rozental berättar om uranklyvning och hans landsman Bøggild om kärnreaktioner. Nobelpristagaren de Hevesy är expert på radioaktiva indikatorer och docent Kai Siegbahn på α-, β- och γ-spektra. Vidare behandlas bl. a. mätmetoder för radioaktiv strålning, strålningsskydd, högspänningsmetodik, cyklotronen, betatronen och synkotronen. Atombombens blixt och dunder komma som logisk avslutning på symfonien.

Ett område, statt i så snabb utveckling som kärnfysiken, är på sätt och vis otacksamt att behandla i en bok, ty här blir det tryckta ordet snabbt föråldrat. Därför hade det varit önskvärt, att kompendiet kommit ut med mindre dröjsmål efter kursens avslutning. Men det enda som hittills blivit föråldrat är egentligen endast några få data beträffande transurana element, sammanförda i en tabell på slutet, så att någon olycka har icke hänt. En dylik

tabell behöver korrigeras och kompletteras nästan varje månad så som arbetet f. n. bedrives inom kärnfysiken. Därmed kan läsaren lugnt fördjupa sig i de många uppsatserna och sålunda på ett lika bekvämt som angenämt sätt göra sig bekant med kärnfysikens nuvarande huvudproblem och grundläggande forskningsresultat.

J. Tandberg.

R. Belcher and A. L. Godbert, *Semi-Micro Quantitative Organic Analysis.* Longmans, Green & C:o, London 1945. Pp. 168, 10 s. 6 d.

För kvantitativ organisk analys, när provet väger mellan 20 och 50 mg, kan man med fördel använda en semi-mikrometod även om man ej disponerar en särskild mikrovåg. Det förutsättes endast, att man har en vanlig god analysvåg, som väger rätt på 0,1 mg och att man är händig i skötseln av densamma. Många av metoderna ha tidigare utarbetats av Pregl för mikroanalys, men senare ha de blivit modifierade av skilda forskare, så att man nu kan arbeta snabbt och säkert med små substansmängder utan att vara underkastad den stränga ritual, som hör samman med mikroanalys. Boken ger anvisningar rörande metodik i allmänhet, elementaranalys, bestämning av aska, fuktighet m. m., vidare smältpunkt, kokpunkt och molekylvikt. Samtliga metoder ha praktiskt utförts av i förväg otränade studenter och, när flera alternativa metoder förelegat, har den enklaste och säkraste valts för publicering. *J. Tandberg.*

L. Wertenstein, *Radioactivité* (Serien »Actualités scientifiques et industrielles», Nr 769), Hermann & Cie, Paris 1939, 116 s., pris 60 fr.

Arbetet är närmast tänkt som ett komplement till Mme Curies »Radioactivité» och är sålunda en exposé över de nyare framstegen på detta område. Efter en kort inledande redogörelse för de nya tekniska hjälpmedlen särskilt för studiet av kärnreaktioner följer en tämligen utförlig framställning av dessa. Kap. III behandlar teorien för atomkärnan och kap. IV slutligen den artificiella radioaktiviteten. Arbetet avslutas av den bekanta tabellen över de stabila isotoperna, vidare en tabell över de 18 första grundämnenas noggranna atomvikter enligt Bethe och Livingston, alltså äldre värden än Mattauchs, slutligen en tabell över experimentellt erhållna radioaktiva element med halveringstider och strålningsart. Vid bedömningen av denna sistnämnda tabell får man givetvis taga hänsyn till arbetets tryckår. Sedan dess har mycket nytt framkommit. Men texten, huvudsaken, är alltjämt aktuell, klar, lättläst och instruktiv. *G. Starck.*

MIT Radar School, *Principles of Radar*. McGraw-Hill Book Company, Inc., 2nd rev. Ed., New York 1946, 887 sid., $ 5.00.

Sommaren 1941 startades radarutbildningskurser för armé- och marinofficerare vid Harvard University och Massachusetts Institute of Technology (MIT). Föreläsningarna vid MIT:s radarskola utgåvos senare i stencilerad form, och detta kompendium utgör den första läroboken om radar. En reviderad upplaga är nu tillgänglig i bokhandeln.

Boken kan varmt rekommenderas åt den som vill skaffa sig närmare kännedom om radar, en av den tillämpade elektronikens mest betydelsefulla produkter. Arbetet är, liksom de flesta anglosachsiska krigsböcker, pedagogiskt mycket förtjänstfullt. Boken är så till vida populär, som avancerad matematik inte kommer till användning. Att den är så pass diger, beror på att ganska mycket grundläggande elektricitetslära och elektronik medtagits.

Rec. vill i detta sammanhang också fästa uppmärksamheten på en välskriven uppsats om radar i den utmärkta lärartidskriften *American Journal of Physics*, vol. 14, sid. 143—164 och 403—431, 1946 (Sherwood K. Haynes—Wilfrid J. Jackson, *The Physics of Radar*). *Torsten Jönsson.*

Julius D. Heldman, *Techniques of Glass Manipulation in Scientific Research*. Prentice-Hall, Inc., New York 1946, 132 sid., $ 3.60.

Denna bok utgör en handledning vid enklare glasarbeten, även glas-metall-arbeten, och är skriven för fysiker, kemister, biologer och ingenjörer, som måste klara sig utan hjälp av professionell glastekniker. Liknande äldre böcker finns ju många, men Heldmans bok är värdefull, därför att den bl. a. ger upplysning om de glassorter, som nu äro de mest använda i U. S. A. I synnerhet om man arbetar med vakuum, behöver man känna till de amerikanska glasen, eftersom man nu i stor utsträckning måste köpa nödiga glasapparaturer (diffusionspumpar, manometerrör, etc.) från Amerika. *Torsten Jönsson.*

Recensenter i detta häfte: civiling. Y. Axner, Försvarets Forskningsanstalt, Stockholm; fil. kand. G. Blom, Stockholm; docent H. Bäckström, Tekniska högskolan, Stockholm; fil. mag. L. Carlbom, Försvarets Forskningsanstalt, Stockholm; lektor B. Grundström, Djursholm; fil. lic. S. Hilding, Stockholm; t. f. laborator T. Jönsson, Chalmers tekn. högskola, Göteborg; prof. N. Ryde, Chalmers tekn. högskola, Göteborg; lektor G. Starck, Stockholm; docent N. Svartholm, Forskningsinstitutet för fysik, Stockholm; prof. J. Tandberg, Stockholm.

Föredrag under hösten 1946 inom svenska matematiska, fysiska och kemiska föreningar.

Lund:

Lunds Matematiska Sällskap, ordf. prof. M. Riesz, sekr. fil. mag. S. B. Nilsson.

Föredrag: prof. M. Riesz, Komplexa tal och kvaternioner i geometrisk framställning (2/10); docent N. E. Fremberg, Såpbubbleexperiment illustrerande lösningen till minimalproblem (2/11); friherre Th. Gyllenkrok, Radar (5/12).

Kemiska Föreningen, ordf. civiling. O. Wiklund, sekr. amanuens L. Bjellerup.

Föredrag: docent B. Adell, Optiska undersökningar över omvandlingen av nitritopentamminkobolt (III) klorid i nitropentamminkobolt (III) klorid (11/10); Dr. techn. A. Deutsch, Några nyare utvecklingslinjer inom läkemedelskemien (15/11).

Stockholm:

Matematiska Sällskapet, ordf. prof. F. Carlson, sekr. fil. kand. O. Hanner.

Föredrag: fil. lic. S. Hilding, Geometriska aspekter i den Hilbertska rymden (29/11).

Fysiska Sällskapet, ordf. prof. H. Hulthén, sekr. fil. mag. R. Westöö.

Föredrag: Cand. Mag. B. S. Madsen, Tellere og deres Anvendelse til Registrerings- og Ionisationsmaalinger (1/10); fil. mag. R. Westöö, Användning av fotografisk emulsion för studiet av kärnreaktioner — intryck från en resa i England (24/10); Dr H. Brinkman, Properties of Gases at High Temperature in Flames and Electric Arcs (13/11); Cand. Real. H. v. Ubisch, Undersökningar på värmetrådsvakuumetrar (28/11).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. H. v. Euler, sekr. doc. L. G. Sillén.

Föredrag: fil. dr H. Hellström, Om färgmätning (15/11).

Uppsala:

Matematiska Föreningen, ordf. doc. C.-G. Esseen, sekr. fil. lic. B. Kjellberg.

Föredrag: fil. lic. S. Hilding, Geometriska aspekter på den Hilbertska rymden (12/10).

Fysiska Sällskapet, ordf. doc. P. Ohlin, v. ordf. laborator E. Bäcklin.

Föredrag: Cand. Mag. B. S. Madsen, Tellere og Tellerør og deres Anvendelse ved Ionisationsmaalinger (30/9); Dr H. Brinkman, Arnhem, Properties of Gases at High Temperatures in Flames and Electric Arcs (15/11); Dr J. Kistemaker, Leyden, Properties of Liquid Helium (6/12).

Kemiska Sällskapet, ordf. prof. A. Fredga, sekr. fil. kand. P. O. Kinell.

Föredrag: Dr H. Guthfreund, Cavendish Laboratory, Cambridge, Some Physical and Chemical Studies on Insulin (8/10); laboratoriechef K. H. Gustavson, Valdemarsvik, Några kolloid- och proteinkemiska synpunkter på garvning (12/11).

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

1500) *Om* $(x_0; y_0; z_0)$ *är en lösning till systemet* $\cos x + \cos y + \cos z = 0$, $\sin x + \sin y + \sin z = 0$, *så äro* $(x_0 + y_0; y_0 + z_0; z_0 + x_0)$ *och* $(2x_0; 2y_0; 2z_0)$ *även lösningar. Visa detta utan att lösa systemet.*

X.

1501) *Om p är ett primtal och m ett godtyckligt, positivt helt tal, hur många faktorer p finnes det då i* $\underline{/p^m}$?

Per Olof Fröman.

1502) *Om en rymdpolygon beskrives i given riktning, bildar planet genom dess i:te sida och en fix punkt vinklarna* u_i *och* v_i *med planet genom sidan och föregående resp. påföljande hörn. Storheterna* u_i *och* v_i *ha samma eller skilda tecken, alltefter som föregående och påföljande hörn ligga på samma sida eller olika sidor om planet genom polygonsidan och den fixa punkten. Sök relationen mellan dessa vinklar.*

N. J.

Enklare matematiska uppgifter.[2]

1503) Lös ekv.syst.
$$\left.\begin{aligned} x + xy + y^2 - a &= 0 \\ x^2 + xy + y + a &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Svar: $x_1 = a$, $y_1 = -a$; $x_2 = \frac{1}{2}(a-1)$, $y_2 = -\frac{1}{2}(a+1)$.

1504) En konvergent, oändlig geometrisk serie med summan $^{16}/_{15}$ är given. Mellan första och andra, andra och tredje, tredje och fjärde o. s. v. termerna inskjutas tre nya termer. Den uppkomna talserien, bestående av de ursprungliga och de nya termerna, kan bildas på två sätt, varigenom två olika geometriska serier uppkomma, vilkas summor ha differensen $^4/_3$. Vilken är den ursprungliga serien?

Svar: 1, $^1/_{16}$, o. s. v.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. Bågman, till vilken uppgifter och lösningar kunna insändas under adress: Högre allm. läroverket å Östermalm, Stockholm.

[2] Uppg. 1503—1506, 1508—1510 äro insända av *B. Svenonius;* 1507, 1514—1516 av *T. Edqvist;* 1511 av *A. Pleijel;* 1512—1513 *A. L.*

1505) $ABCD$ är en kvadrat. Sök en punkt P i eller utom kvadratens plan, belägen så, att $\overline{PA}^2$, $\overline{PB}^2$, $\overline{PD}^2$ och $\overline{PC}^2$ bilda aritmetisk serie.

Svar: Villkoret uppfylles av varje punkt i det normalplan mot medianen från B i $\triangle ABD$, som går genom kvadratens centrum.

1506) Diametern i en cirkel med radien r delas i n lika delar, och genom delningspunkterna dragas kordor vinkelrätt mot diametern. Sök summan av alla dessa kordors kvadrater.

Svar: $\frac{8r^2(n^2-1)}{3n}$.

1507) Ett 90 m djupt borrhål skulle borras i jorden. Första dagen borrade man 200, andra 198, tredje 196 cm o. s. v. i aritmetisk serie. Varje arbetsdag var borret i verksamhet 8 effektiva timmar. Hur många timmar erfordrades för hela arbetet? Borret antages sänka sig med konstant hastighet under en och samma dag.

Svar: $538\frac{2}{3}$.

1508) I en cirkel (radie r) inskrives en triangel, och i de mellan cirkeln och triangeln belägna tre segmenten inskrivas cirklar (radier r_1, r_2, r_3). Visa, att $r_1 + r_2 + r_3 < r$.

1509) I en likbent triangel inskrevs symmetriskt en kvadrat, vilkens yta befanns vara hälften av triangelns. Sök förhållandet mellan den likbenta triangelns bas och den häremot dragna höjden.

Svar: 1 : 1.

1510) I en cirkelsektor med medelpunktsvinkeln $v \leqq 90°$ kan på två sätt en kvadrat inskrivas. Bestäm v för det fall, att de två kvadraterna äro lika stora.

Svar: 30°.

1511) Visa utan beräkning av termerna, att $\cos 36° - \cos 72° = 0{,}5$.

1512) Kring triangeln ABC, där vinkeln $A = 60°$, är en cirkel omskriven. Mittpunkten av bågen BC tages till centrum för en cirkel, som går genom B och C och skär AB i D. Beräkna vinkeln B, om $AD : DB = 1 : 2$.

Svar: $B = 19{,}11°$.

1513) Kring triangeln ABC omskrives en cirkel. Mittpunkten av bågen BC tages till centrum för en cirkel genom B och C. Visa, att bissektrisen till vinkeln A av sistnämnda cirkel delas i förhållandet $\sin(\frac{A}{2} + B) : \sin\frac{A}{2}$. $(B < C)$.

1514) Två plan P och Q skära varandra under 60° vinkel. I P är en rätvinklig triangel med kateterna 3 cm och 4 cm uppritad.

Den räta vinkelns spets ligger på planens skärningslinje, och den större kateten bildar 30° vinkel med denna linje. Hur lång är hypotenusans projektion på Q?

Svar: $\frac{1}{4}\sqrt{271 \pm 72\sqrt{3}} = 4{,}97$ cm eller $3{,}02$ cm.

1515) En rak, parallellt stympad kons basradier äro R och r samt höjd h. Sök rätliniga avståndet mellan två punkter, en på vardera bottenperiferien, om deras vinkelavstånd i vardera bottenytan från en fix generatris äro α och β.

Svar: $\sqrt{h^2 + R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\alpha \pm \beta)}$.

1516) En med x-axeln parallell linje skär i första axelvinkeln kurvan $y = x^2$ i en punkt P och i andra axelvinkeln cirkeln $x^2 + y^2 = 36$ i Q. Bestäm maximum av sträckan PQ.

Svar: $\sqrt{50}$ enheter.

Lösn. till uppg. 1468—1470.

1468) *Till två sfärer drages en gemensam tangent samt dennas och centrallinjens gemensamma normal. Orten för normalens fotpunkt på tangenten är en rotationsyta, vars snittkurva med ett plan genom centrallinjen skall bestämmas.* *N. J.*

Vi antaga, att $P(-a;\ 0)$ är centrum för den ena sfären med radien R, $Q(a;\ 0)$ för den andra med radien r, tangeringspunkterna resp. A och B, normalens fotpunkt $C(x;\ y)$. Vi projiciera AB på det med AB parallella planet genom PQ. Äro projektionerna resp. A_1, B_1 och C_1, blir $\triangle A_1C_1P \sim B_1C_1Q$, varav $\overline{PA_1}^2 : \overline{QB_1}^2 = \overline{PC_1}^2 : \overline{QC_1}^2$ eller $\frac{R^2 - y^2}{r^2 - y^2} = \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2$ (1), som alltså är kurvans ekvation. Den kan skrivas $4axy^2 + (R^2 - r^2)(x^2 + a^2) - 2ax(R^2 + r^2) = 0$ eller $2y = \pm\sqrt{\frac{[(R+r)x - (R-r)a]\ [(R+r)a - (R-r)x]}{ax}}$ (2), varvid faktoruppdelningen underlättas genom observationen, att x-axeln måste skära rotationsytan i sfärernas likställighetscentra. Om $R > r$, är kurvan reell mellan dessa punkters abscissor och för $x < 0$. Man inser geometriskt eller genom räkning, lämpligen med användning av (1), att den tvåtydiga funktionen har ett maximum r och ett minimum $-r$ för $x = a$ samt ett min. R och ett max. $-R$ för $x = -a$. Mot den del av rotationsytan, där $x < 0$, svarar imaginära tangenter. Man observerar, att av de fyra gemensamma tangenter, som gå genom varje punkt på rotationsytan, ha två en genom punkten gående normal gemensam med centrallinjen. Genom likställighetscentra på ∞^1 gemensamma tangenter. Är

$R = r$, reducerar sig orten till de räta linjerna $y = \pm r$ och $x = 0$; de båda förra i sin helhet samt sträckan mellan $(0; -1)$ och $(0; 1)$ av den sista svara mot reella tangenter. *N. J.*

Även löst av *A. Lödemel.*

1469) *Man kan visa, att om en triangels sidor tangera en parabel, råkas de tre linjer, som förena ett hörn med motstående sidas tangeringspunkt, i en punkt. Sök orten för denna, om de tre tangenterna äro fasta och parabeln variabel.* *Less.*

Vi antaga, att den givna triangeln är projektionen av den liksidiga triangeln ABC. Fullborda parallellogrammen $ABDC$. En inskriven parabel tangerar AB i C_1 och AC i B_1. Enligt Brianchon (se även F. Carlson, Geometri uppg. 346) går B_1C_1 genom D, och punkterna B_1 och C_1 motsvara varandra projektiviskt, då parabeln varierar. För $BC_1 = 0$, är $CB_1 = \infty$ och tvärtom. Alltså är $BC_1 \cdot CB_1 =$ en konstant och av specialfallet $B_1C_1 \parallel CB$ får man $BC_1 \cdot CB_1 = \overline{BC}^2$. Följaktligen är $\triangle C_1BC \sim BCB_1$. Till samma resultat leda analogierna $BC_1 : BC = BC_1 : BD = CD : CB_1 = BC : CB_1$. Linjerna CC_1 och B_1B, som vrida sig med samma hastighet åt samma håll, bilda konstanta vinklar på 60° och 120° liksom CB och CA. Orten för skärningspunkten G (Gergonnes punkt) mellan BB_1 och CC_1 blir därför *cirkeln* ABC. Vid återgång till den ursprungliga figuren erhålles *den omskrivna ellips, för vilken tangenterna i triangelhörnen äro parallella med motstående sidor.* *X.*

Även löst av *Cege, A. Lödemel, F. E.*

1470) *I en cirkel med radien R äro $AC = 2a$ och $BD = 2b$ två mot varandra vinkelräta kordor. AB och DC råkas i U, AD och BC i V. Beräkna avståndet UV.* *X.*

Lägg in cirkeln i ett koordinatsystem med axlarna parallella med AC och BD. Punkterna A, B, C och D få följande koordinater. $A : (-R\cos v; -R\sin v)$, $B : (R\cos u; R\sin u)$, $C : (R\cos v; R\sin v)$, $D : (R\cos u; -R\sin u)$, där $a = R\cos v$ och $b = R\sin u$. Genom elementära räkningar fås $U : \left(\frac{R\cos v}{\cos(u+v)}; \frac{R\sin u}{\cos(u+v)}\right)$ och $V : \left(\frac{R\cos v}{\cos(u-v)}; -\frac{R\sin u}{\cos(u-v)}\right)$, varav

$$\overline{UV}^2 = \frac{16R^2\sin^2 u\cos^2 v(\sin^2 v+\cos^2 u)}{(\cos 2u+\cos 2v)^2} = \frac{4a^2b^2(2R^2-a^2-b^2)}{(a^2-b^2)^2} \text{ och}$$

$$UV = \frac{2ab\sqrt{2R^2-a^2-b^2}}{|a^2-b^2|}.$$

Arne Pleijel.

Även löst av *Cege, K. J. Åkerblom, E. Smn, A. Lödemel.*

Annan lösning:

I det följande betecknar (AB) den på linjen AB som diameter uppritade cirkeln. De givna kordorna råkas i W; P, Q, M äro mittpunkterna av AC, BD, UV; O den givna cirkelns centrum. Enligt en sats om en fullständig fyrsiding tillhöra (AC), (BD), (UV) samma knippe (med gemensam radikalaxel); deras centra P, Q, M ligga i rät linje (Newton). Enligt en känd sats är UVW en polartriangel till den givna cirkeln, så att O är ortocentrum (höjdernas skärningspunkt) i triangeln. Det visas då lätt, att (UV) och $(OW) = (PQ)$ äro ortogonala, så att $\overline{UV}^2 = 4MP \cdot MQ \ldots$ (1). Emedan (UV) delar sträckan PQ harmoniskt, är $\overline{PX}^2 : \overline{QX}^2 = \overline{PY}^2 : \overline{QY}^2 = (\overline{PX}^2 - \overline{PY}^2) : (\overline{QX}^2 - \overline{QY}^2) \ldots$ (2), där X och Y äro skärningspunkterna mellan PQ och (UV). Emedan (UV) tillhör knippet $\{(AC), (BD)\}$, är förhållandet mellan de sistnämnda cirklarnas potenser konstant på (UV) d. v. s. $(\overline{PX}^2 - a^2) : (\overline{QX}^2 - b^2) = (\overline{PY}^2 - a^2) : (\overline{QY}^2 - b^2) = (\overline{PX}^2 - \overline{PY}^2) : (\overline{QX}^2 - \overline{QY}^2) \ldots$ (3). Av (2) och (3) fås $\overline{PX}^2 : \overline{QX}^2 = \overline{PY}^2 : \overline{QY}^2 = a^2 : b^2 \ldots$ (4).[1] Härav slutes, att M, som är mittpunkten av XY, delar PQ utantill i förhållandet $PM : MQ = -a^2 : b^2 \ldots$ (5). Då slutligen $PQ = \sqrt{2R^2 - a^2 - b^2}$, beräknas PM och QM enl. (5) och UV enl. (1).

Anm. 1. Om $\sphericalangle POQ = v$, fås PQ med cosinusteoremet; för övrigt samma resultat.

Anm. 2. (UV) innehåller de punkter, i vilka (AC) och (BD) synas under lika vinklar; (UV) skär vidare den givna cirkeln ortogonalt.

X.

[1] Om (AC), (BD) och $(UV) = (XY)$ råkas i en *reell* punkt S utanför centrallinjen, följer (4) direkt, emedan de vinkelräta linjerna SX och SY då måste vara bissektriser till $\sphericalangle PSQ$.

Studentexamen och fyllnadsprövning efter studentexamen.

Januari 1947.

Matematiska uppgifter för latinlinjen.

1. I en triangel äro två sidor 7 cm och 9 cm och medianen till den den tredje sidan 4 cm. Sök triangelns vinklar.
2. Utmed stranden av en sjö har man utstakat en rät, horisontell baslinje AB av 100 m längd. En punkt C är belägen på andra sidan sjön och i samma horisontalplan som A och B. Man önskade uppmäta det vinkelräta avståndet från C till den räta linjen genom A och B. Medelst ett vinkelmätningsinstrument, en s. k. teodolit, som placerats i A, uppmättes vinkeln BAC till 97,4°. Sedan teodoliten därefter flyttats till B, uppmättes på samma sätt vinkeln ABC till 75,7°. Beräkna det sökta avståndet.
3. En punkt P på sidan AB i kvadraten $ABCD$ förenas med hörnen C och D. Beräkna förhållandet $PA : PB$, om förhållandet $PC : PD = 5 : 7$.
4. I en konvergent oändlig geometrisk serie är summan av de tre första termerna $\frac{7}{2^7}$ och summan av första, tredje och femte termerna $\frac{91}{2^{43}}$. Beräkna summan av den oändliga serien.
5. En triangels yta är 600 cm². Den inskrivna cirkelns radie är 10 cm och en av de vidskrivna cirklarnas 20 cm. Beräkna triangelns sidor.
6. Sambandet mellan koordinaterna x och y för en punkt i ett rätvinkligt koordinatsystem erhålles ur ekvationerna

$$\begin{cases} x = 3t - 3, \\ y = 4t - 3t^2, \end{cases}$$

där t är en variabel storhet. Detta samband mellan x och y kan grafiskt åskådliggöras genom en kurva. Upprita denna, bestäm de punkter, där kurvan skär axlarna, samt ange med ledning av kurvan eller på annat sätt kurvans maximipunkt.
7. I ett likbent parallelltrapets, i vilket de parallella sidorna äro $2a$ och $2b$ $(a > b)$, kan en cirkel inskrivas. Cirkelns tangeringspunkter med de icke parallella sidorna sammanbindas. Beräkna förhållandet mellan ytorna av de båda delar, i vilka trapetset delas genom sammanbindningslinjen.
8. Från hörnet A i triangeln ABC drages medianen AM. Från M fällas normalerna MD och ME mot AC respektive AB, och från D och E fällas normalerna DF och EG mot AM. Bestäm förhållandet $AB : AC$, om förhållandet $MF : MG$ betecknas med k.

Resultat: 1. 25,20°; 33,20°; 121,60°. 2. 800 m. 3. $24+\sqrt{649}=49{,}48$. 4. $\frac{1}{4}$. Använd summa-formeln el. uppdela $k^4+k^2+1=(k^2+1)^2-k^2$ i faktorer. 5. 30 cm, 40 cm, 50 cm. 6. Kurvan skär axlarna i $(-3;0)$, $(0;1)$ och $(1;0)$ och har max. i $(-1;\ ^4/_3)$. 7. $\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{3a+b}{3b+a}$. 8. $\sqrt{k}$; $\triangle ABM$ och $\triangle ACM$ ha lika ytor, varav $AB:AC=MD:ME$. Vidare är $\overline{MD}^2=MF\cdot MA$, osv.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Allmän kurs.

1. En sfärisk sektor delas medelst ett plan i ett sfäriskt segment och en rät cirkulär kon. Härigenom delas sektorns begränsningsyta mitt itu. I vilket förhållande delas dess volym?
2. I de båda serierna 10, $10x$, $10x^2$, ... och 0, x, $2x$, $3x$, ... bestämmes x så, att skillnaden mellan termerna med ordningsnumret 11 i de båda serierna, tagna i angiven ordning, blir så liten som möjligt. Beräkna för detta x-värde förhållandet mellan summorna av de 9 första termerna i den aritmetiska och i den geometriska serien.
3. Lös ekvationen $2\sin 2x-\cos 6x=4\sin^2 x\sin 2x$.
4. I parallelltrapetset $ABCD$ är AB 6 cm, BC 10 cm, CD 21 cm och DA 20 cm. Beräkna totala ytan av den kropp, som uppkommer genom att figuren roterar kring en axel, som ligger i figurens plan, är vinkelrät mot de parallella sidorna AB och CD samt går genom den punkt, där de båda övriga sidornas förlängningar skära varandra.
5. Triangeln ABC är placerad i ett koordinatsystem, så att A är belägen i origo, B i punkten $(-10;0)$ och C i punkten $(-4;3)$. Triangeln förskjutes i koordinatsystemets plan till läget $A_1B_1C_1$, så att B_1 kommer att ligga i C och origo på A_1B_1. Bestäm ekvationen för medianen från C_1.
6. En triangels sidor äro 26 cm, 28 cm och 30 cm. En cirkel med radien 2 cm har sin medelpunkt M på en av triangelns sidor. Hur stor yta överfares av cirkeln, då M beskriver triangelns omkrets?
7. Sidovinklarna vid spetsen i en tresidig pyramid äro alla räta. Bevisa, att kvadraten på basytan är lika med summan av kvadraterna på sidoytorna.
8. Upprita kurvan $y=x^2-6x+10$. Undersök, hur avståndet z mellan en punkt P på kurvan och punkten $(5;6)$ varierar, då P genomlöper hela kurvan. Åskådliggör i ett särskilt diagram sambandet mellan z och x genom en ungefärlig kurva.

Resultat: **1.** 13 : 12. **2.** $4(\sqrt[9]{0{,}1} \cdot \sqrt[9]{0{,}01}) = 0{,}699$. **3.** $9° + n \cdot 36°$; $135° + n \cdot 180°$. **4.** $1311\,\pi = 4119$ cm². **5.** $13y - 9x = 0$. Om origo tillåtes ligga på förlängningen av A_1B_1, kommer A_1 i $(-12; 9)$, och medianens ekv. blir $13y - 9x - 150 = 0$. — Medianen från B har vinkelk. $= 3$, osv. **6.** $315 + 4\,\pi = 327{,}6$ cm². Låt r vara radien i den i triangeln (T) inskrivna cirkeln och $a(\leqq r)$ radien i den rörliga cirkeln. Den del av den överfarna ytan, som ligger utanför T, är = tre rektanglar $+ \pi a^2$; den del som ligger inom T är skillnaden mellan T och en med denna likformig triangel med inskrivna cirkelns radie $= r - a$. **8.** Med från $-\infty$ till $+1$ växande x avtar z från ∞ till $\sqrt{17} = 4{,}123$ och växer sedan till $2\sqrt{2} + 1{,}5\sqrt{3} = 5{,}426$ för $x = 4 - \sqrt{1{,}5} = 2{,}775$. Härefter avtar z till $2\sqrt{2} - 1{,}5\sqrt{3} = 0{,}230$ för $x = 4 + \sqrt{1{,}5} = 5{,}225$ för att sedan öka till ∞, när $x \to +\infty$.

Matematiska uppgifter för reallinjen.

Specialkurs.

1. Konstruera kurvan $x^3 + x^2y + y = 0$ i dess huvuddrag. Bestäm ekvationerna för de tangenter till kurvan, vilka äro parallella med kurvans asymptot.
2. Bestäm x-värdena för eventuella maximi-, minimi- och inflexionspunkter till kurvan $1{,}5y = 6x + 10 \sin x + \sin 2x$ inom intervallet $0 \leqq x \leqq 2\pi$.
3. Punkterna A och B med koordinaterna (3; 3,2) respektive (0; 4) ligga båda på ellipsen

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

   F_1 är ellipsens högra, F_2 dess vänstra brännpunkt. Linjerna F_1B och F_2A skära varandra i punkten C. Förlängningarna av linjerna F_1A och F_2B skära varandra i punkten D. Visa, att en cirkel kan inskrivas i fyrhörningen $ADBC$.
4. Excentriciteten för en hyperbel är $\sqrt{5}$. Ett par konjugatdiametrar bilda de spetsiga vinklarna α respektive β med hyperbelns ena asymptot. Beräkna värdet av uttrycket

$$(\cot \alpha - \cot \beta)^2.$$

5. En rät linje råkar koordinataxlarnas positiva delar i punkterna A och B. Omkretsen av triangeln AOB, där O är origo, är 4 längdenheter. Sök orten för mittpunkten av sträckan AB. Hyfsa den erhållna ekvationen för orten, konstruera den motsvarande kurvan samt ange, vilken del av densamma som representerar orten.

6. Normalen till parabeln $y^2 = 4ax$ i en punkt P på kurvan råkar axeln i punkten N och parabeln ytterligare i punkten Q. Undersök, om projektionen av sträckan NQ på parabelns axel närmar sig till ett gränsvärde, då punkten P avlägsnar sig obegränsat från origo.

7. Funktionen $z = f(y)$ är kontinuerlig liksom dess derivata $\frac{dz}{dy}$. Mot varje y-värde svarar endast ett z-värde. Funktionen har icke något maximivärde och endast ett minimivärde, $z = -1$, som uppnås för $y = -\frac{1}{2}$. Funktionen antar värdet 0 för $y = \pm 1$. Om nu y beror av en annan variabel x enligt sambandet $y = \cos x$, så blir z en funktion av x. Bestäm, med användande av grafisk metod eller på annat sätt, maxima och minima av denna funktion, och upprita ett diagram över dess ungefärliga förlopp.

Resultat: **1.** Origo är centrum och inflexionsp.; asymptot: $x + y = 0$; de sökta tangenterna: $x + y = \pm 0{,}5$. **2.** Max. för $x = \frac{2\pi}{3}$, min. för $x = \frac{4\pi}{3}$, inflexionsp. (och centra) för x-värdena 0, π, 2π. **3.** Medelpunkten bör sökas i skärningsp. $T\left(\frac{5}{3}; 4\right)$ mellan ellipstangenterna i A och B, som äro bissektriser till vinklarna A resp. B i fyrhörningen. Avstånden från T till AD resp. BC befinnas vara lika ($= 1\frac{1}{3}$). Allmänt gäller för två icke diametralt motsatta punkter A och B på en ellips eller hyperbel, att samma cirkel tangerar AF_1, BF_1, AF_2 och BF_2, enär TF_1 är bissektris till vinkeln AF_1B (se F. Carlson, Geometri I §§ 104—105). **4.** Om $2v$ är vinkeln mellan asymptoterna och $\operatorname{tg} v = k$, gäller $\operatorname{tg}(v + \alpha) \cdot \operatorname{tg}(v - \beta) = k^2$, som ger $\left(\cot\alpha + \frac{1}{k}\right)\left(\cot\beta - \frac{1}{k}\right) = (\cot\alpha - k)(\cot\beta + k)$, varav $(\cot\alpha - \cot\beta)\left(k + \frac{1}{k}\right) = k^2 - \frac{1}{k^2}$ och slutligen $(\cot\alpha - \cot\beta)^2 = \left(k - \frac{1}{k}\right)^2 = 4\cot^2 2v$; i vårt fall blir svaret alltså 2,25. Härledning utan räkning: Om OD och OD_1 äro två konjugerade halvdiametrar, fullbordas parallellogrammen $ODPD_1$, där P och diagonalernas skärningsp. M ligga på ena asymptoten samt DD_1 är parallell med den andra asymptoten. Om N och N_1 äro projektionerna av D och D_1 på OP, fås $\cot\alpha = ON : DN$, $\cot\beta = ON_1 : D_1N_1 = ON_1 : DN$, varför $\cot\alpha - \cot\beta = NN_1 : DN = 2MN : DN = 2\cot 2v$. **5.** Den i första axelvinkeln liggande delen av nedre grenen hos den liksidiga hyperbeln $(x - 2)(y - 2) = 2$. **6.** Projektionen av $NQ = 2a + \frac{16a^3}{y_1^2} \to 2a$

(subnormalens längd). Utan räkning: Normalkordan PQ tenderar att bli vinkelrät mot axeln, dess diameter att sammanfalla med axeln så, att $PN : NQ \to 1$. Då går även projektionernas förh. mot 1, dvs. projektionen av $QN \to 2a$. 7. Funktionens $z = f(\cos x)$ nollställen ($x = n\pi$) måste enl. förutsättningen även bli maximipunkter; z avtar således från max. $= 0$ för $x = 0$ till ett min. $= -1$ för $x = \frac{2\pi}{3}$, växer sedan till max. $= 0$ för $x = \pi$, som (liksom $x = n\pi$ i allm.) är en symmetriaxel.

Uppgifter i fysik.

Obs. Lösningarna till uppgifterna 1, 2 och 4—8 böra åtföljas av enkla figurer. — Erforderliga konstanter, vilka ej äro uppgivna i problemens text, hämtas ur formelsamlingen.

1. Man ville veta storleken av den kraft, varmed en svag vind av vågrät riktning påverkade en liten ballong. Ballongen fasthölls med ett lätt snöre, och man kunde fastställa, att snöret bildade vinkeln 35° med lodlinjen. Den nedtogs därefter, och man undersökte i stillastående luft med hur stor vikt man måste belasta snöret för att nätt och jämnt hindra ballongen från att lyfta. Denna vikt befanns vara 38 g. Beräkna den sökta kraften. Ballongens volym och den undanträngda luftens täthet antagas oförändrade under observationerna.
2. En liten kula är upphängd i en tråd, vars vikt kan försummas, och rör sig som en konisk pendel. Vid en viss utslagsvinkel är omloppstiden T_1 och spänningen i tråden k_1, vid en annan utslagsvinkel äro dessa storheter T_2 resp. k_2. Sök förhållandet mellan spänningarna k_1 och k_2.
3. För ett torkrum, vars temperatur skall vara + 70° C, uppvärmes per timme 200 m³ luft, vars temperatur är + 15° C och tryck 755 mm kvicksilver. Luften strömmar genom en kanal, i vilken placerats en serie elektriska värmespiraler. Verkningsgraden vid uppvärmningen är 60 %. Beräkna kostnaden för uppvärmningen per timme efter ett energipris av 9 öre per kWh. För luftens specifika värme begagnas värdet 0,24 cal per g och grad.
4. En liten sfärisk glödlampa med ballong av mattglas var kopplad till belysningsnätet i serie med en ampèremeter och ett skjutmotstånd. Till lampan var en voltmeter med mycket högt ohmtal ansluten. Lampan belyste en luxmeter, placerad mitt under densamma på 50 cm avstånd från dess centrum. Ljuset föll därvid vinkelrätt mot luxmeterns ljuskänsliga yta. När lampspänningen medelst skjutmotståndet reglerats till 130 V,

visade ampèremetern 0,30 A och luxmetern 143 lux. Hur många watt per normalljus förbrukade lampan under dessa omständigheter? Lampan antages stråla likformigt i alla riktningar.

5. Vid en laboration bestämdes brytningsindex för glycerin genom följande försök. En sfärisk kokkolv (rundkolv) anbragtes i ett stativ med halsen i vertikal ställning och fylldes upp till mynningen med vatten. Mynningen täcktes därefter med ett halvgenomskinligt papper, en liten glödlampa anbragtes ett stycke nedanför kolven, så att glödtråden kom på kolvens lodräta symmetriaxel, och en bländare anbragtes strax under kolven, varigenom blott centrala strålar släpptes fram. Genom att variera lampans avstånd från kolven fann man ett sådant läge, att en tydlig bild av lampans glödtråd avtecknade sig på det halvgenomskinliga papperet. Avståndet från kolvens lägsta punkt till glödtråden var då 51,0 cm, avståndet från samma punkt till papperet 15,0 cm. När vattnet sedan utbyttes mot glycerin och försöket upprepades, erhölls en tydlig bild, om glödtråden befann sig 17,5 cm under kolven. Beräkna brytningsindex för glycerin. Ingen hänsyn tages till brytningen i kolvens tunna glasvägg.
6. För att bestämma brytningsindex för ett glasprisma uppställde man det på en spektrometers prismabord, belyste kollimatorspalten med natriumljus och utförde följande mätningar. 1) Prismabordet vreds, tills man i kikaren såg spaltbilden under minimideviation. Därefter fastlåstes prismabordet, och kikaren inställdes så, att dess hårkors sammanföll med spaltbilden. Kikarens läge avlästes på en 360-gradig cirkelskala, varvid ett med kikaren fast förbundet märke befanns stå vid 145,6° på skalan. 2) Kikaren vreds, tills den uppfångade det ljusknippe, som reflekterats på första prismaytan, och inställdes så, att hårkorset sammanföll med den bild man såg av kollimatorns spalt. Märkets läge på cirkelskalan avlästes till 265,6°. 3) Prismat borttogs, och kikaren inställdes i ljusknippet från kollimatorn. Då hårkorset sammanföll med spaltbilden, var märkets läge på skalan 184,9°. Beräkna prismats brytningsindex.
7. En voltmeter gör 1 skaldels utslag, när spänningen mellan dess anslutningsklämmor *A* och *B* är 1 V. För att kunna använda den för högre spänningar har man ett förkopplingsmotstånd, avsett att inkopplas mellan *B* och en tredje anslutningsklämma *C* på voltmetern. På motståndet står 7,5 V, vilket betyder, att instrumentet gör 1 skaldels utslag, när spänningen mellan *A* och *C* är 7,5 V. Vid ett tillfälle vill man mäta en ännu högre

spänning och tar därför två sådana förkopplingsmotstånd, seriekopplar dem och sätter in dem mellan *B* och *C*. Hur stor blir nu spänningen mellan *A* och *C* för varje skaldels utslag på instrumentet?

8. En elektrisk motståndstermometer grundar sig på att en metalltråds motstånd ändras med temperaturen. Man hade vid ett tillfälle sammankopplat fyra motstånd till en fyrhörning *ABCD*. Motstånden *AB*, *CD* och *DA* voro av konstantan och vartdera lika med 100 Ω. Motståndet *BC* utgjordes av en i ett kvartsrör innesluten platinaspiral. Vid 0° C var även dess motstånd 100 Ω, men det ökades med 0,4 Ω för varje grads temperaturförhöjning. Till punkterna *B* och *D* hade man anslutit en ledning, bestående av en galvanometer och ett med denna seriekopplat förkopplingsmotstånd, och till punkterna *A* och *C* ett ackumulatorbatteri. Galvanometerns motstånd var 50 Ω, och den gjorde fullt utslag för strömstyrkan 2,0 mA. Ackumulatorbatteriets elektromotoriska kraft var 4,0 V, dess inre motstånd kunde försummas. När platinatrådens temperatur var 0°, var galvanometern strömlös, men om den uppvärmdes, började galvanometern göra utslag. Man ville, att den skulle göra fullt utslag, när platinatrådens temperatur var 250° C. Hur stort borde i så fall förkopplingsmotståndet tagas?

Resultat: **1.** 26,6 gf. **2.** $(T_2)^2 : (T_1)^2$. **3.** 56 öre. **4.** 1,09 W per normalljus. **5.** 1,48. **6.** $2 \sin 49{,}65° = 1{,}52$. **7.** 14 V. **8.** 166,7 ohm.

Tidskrifter.

Populär astronomisk tidskrift, 1946: 3—4.

Ur innehållet: N. V. E. Nordenmark, Varför lämnade Tycho Brahe Ven?; O. Eklöf, Neptunus upptäckt, ett hundraårsminne; Å. Wallenquist, Pulserande och exploderande stjärnor; O. H. Grönstrand, Om meteorregn; Y. Öhman, Till frågan om solkoronans natur; Notiser.

Svensk kemisk tidskrift, 1946: 11—12; 1947: 1.

Ur innehållet: E. Hultin, A Viscosimetrical Method for the Determination of Enzymic Activity; O. Samuelson, On the Reaction between Alkali Cellulose and Carbon Disulphide; K. J. Karrman, Hydroxyretene Aldehydes; H. Suomalainen and O. Kinnunen, On the Metabolic Acetylations; N. Löfgren and G. Widmark, Studies on Local Anaesthetics IV; C. Nielsen, Recent Research and Developments by the Pharmaceutical Industry in U. S. A.

Populär radio, 1946: 12; 1947: 1—3.

Ur innehållet: Ekoradio; Shuntar och förkopplingsmotstånd; Mätning av stora elektrolytkondensatorer; Frekvenskarakteristiken vid grammofoninspelning; Enkel resonansmätare; Mikrovågsteknik; Decca, ett engelskt navigationssystem; Nya typer av nålmikrofoner.

Nordisk Astronomisk Tidsskrift, København 1946: 4; 1947: 1.

Ur innehållet: E. STRÖMGREN, Tycho Brahe 1546—1946; Tycho Brahes Instrumenter; B. STRÖMGREN, Tycho Brahe; JULIE M. VINTER HANSEN, Stjernernes Rotation; A. V. NIELSEN, Iakttagelser af foranderlige Stjerner; E. STRÖMGREN, Tycho Brahes Forhold til Kepler og til Efterverdenen.

Naturens Verden, København 1946: 4—10.

Ur innehållet: K. VEJLBY, Planternes Fotosyntese; CHR. STAPEL, Om DDT (Pentaklordifenylætan) som Insektbekæmpemiddel; K. E. STUBBE TEGLBJÆRG, D. D. T.:s Anvendelse i Medicinen; C. TSCHERNING, Danmarks Klima og Danmarks Høst; F. LUNDQUIST, Hvorledes utnytter den levende Celle sit Brændsel?; E. STRÖMGREN, Tycho Brahe; M. WESTERGAARD, Den biokemiske Genetik; R. E., Vorledes orienterer Flagermus sig under deres Flugt?; H. POULSEN, Brevduers Evne til at finde Hjem.

Norsk Matematisk Tidsskrift, Oslo 1946: 3—4.

Ur innehållet: V. BRUUN, m. fl., En brevveksling om et polynom som er i slekt med Riemanns zetafunktion; E. GÖTLIND, Om några ekvivalenssatser i tvåvärdelogiken; K. N. SUNDET, Konstruksjoner ved noen rasjonale kurver; L. N. PERSEN, Utvikling av de Whittakerske funksjoner etter »ufullstendige» Besselfunksjoner; Eksamensoppgaver; Oppgaver til løsning; Løste oppgaver.

Fra Fysikkens Verden, Oslo 1946: 3.

Ur innehållet: E. A. HYLLERAAS, Nobelpristagere i fysikk: M. Planck, J. Stark, Ch.-E. Guillaume; IRÈNE JOLIOT CURIE, Grunnstoffomdannelser og atomenergi; J. HOLTSMARK, De greske naturfilosofer.

Naturen, Bergen 1946: 11—12; 1947: 1—2.

Ur innehållet: H. DAHL, Radar; G. RANDERS, Verdensrommet og spiraltåkene; S. EVJEN, Nedbørhyppigheten i Oslo og dens avhengighet av barometerstanden; K. LANGLO, Måler vi riktig lufttemperatur?; A. ÅMOT, Atmosferisk turbulens og flyging; K. FAGRI, Rekrutteringen til norsk vitenskap i fare.

Matemaattisten Aineiden Aikakauskirja, Helsingfors 1946: 1—4.

Uppsatser på svenska: E. FALCK, Proportionsläran i skolgeometrin; B. GUSTAVER, Några laborations- och demonstrationsförsök i kemi; H. SLÄTIS, Atomsprängningen och annan verksamhet vid Forskningsinstitutet för Fysik i Stockholm; E. STENIUS, Matematikens allmänbildningsvärde och undervisningen i mellanskolan.

Science Progress, 1946: July, Oct.; 1947: Jan. A Quarterly Review of Scientific Thought, Work and Affairs. E. Arnold, London, à 7 s. 6 d.

Ur innehållet: Atomic energy; The variation in reproductive capacity of plants; Physical states of aggregation; Some aspects of the geology of water supply; The new optical glasses; The Waldon inversion: The entomology of stored products; This subject of granite; Colour; The geochemistry of uranium; The Venetian Lagoon; The structure of real crystals; Chemical reactions involving free radicals; Cosmic ray mesons. Recent Advances in Science: Astronomy, Physics, Physical Chemistry, Biochemistry, General and organic Chemistry, Meteorology, Geology, Plant Physiology, Entomology. — Artiklarna ha till förf. fackmän inom resp. områden. Dessutom ett stort antal notiser och bokanmälningar.

Matematik - Fysik

Formelsamling i matematik och fysik
4:e uppl., fastställd av Kungl. Skolöverstyrelsen den 28 mars 1946 för användning vid de skriftliga proven i studentexamen. Kr. 0: 30

J. S. Hedström och Einar Öije

Matematiska uppgifter i realexamen
VT 1907—VT 1945. 19:e uppl. Kr. 0: 85

Rydberg—Wahlström

Matematiska uppgifter, givna i studentexamen på reallinjen
VT 1881—aug. 1946.
Urval med svar och anvisningar för *allmän kurs*. 11:e uppl. Kr. 1: 30

B. Wahlström

Matematiska uppgifter, givna i studentexamen på latinlinjen
Jan. 1936—VT 1945. 2:a uppl. Kr. 1: —

B. Wahlström

Matematiska uppgifter, givna i studentexamen på reallinjen
VT 1896—VT 1946. Urval för *specialkurs*. 5:e uppl. Kr. 1: 35

Rydberg—Wahlström

Uppgifter i fysik, givna i studentexamen
VT 1904—HT 1943. 17:e uppl. Pprb. kr. 1: 70

Samtliga dessa arbeten upptagna i statens läroboksnämnds förteckning.

Rekvirera vår nyutkomna katalog över läro- och läseböcker samt annan litteratur för undervisning och självstudium. Den erhålles gratis på begäran.

SVENSKA BOKFÖRLAGET
STOCKHOLM

SKIOPTIKONPLÅTAR

med rörliga delar

för demonstration av:

Likriktning / Slinga i magnetfält

Grammes ring / Trumankare

Enfasgenerator / Trefasgenerator

Pris pr st. 15:— kr., Hållare till d:o 4:50.

VÅGRÖRELSEPLÅTAR

sats om 9 st. med 2 spalter

Pris pr sats 95:— kr.

Ovanstående apparater är konstruerade av lektor A. Leide och levereras av

P. A. NORSTEDT & SÖNER

Skolavdelningen Stockholm

Håkan Ohlssons Boktryckeri, Lund 1947.